Slabě implikativní logiky

Úvod do abstraktního studia výrokových logik

Petr Cintula a Carles Noguera

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia“ je spolufinancován z Evropského sociální fondu a státního rozpočtu České republiky.

Slabě implikativní logiky

Úvod do abstraktního studia výrokových logik

Petr Cintula a Carles Noguera

Překlad: Tomáš Lávička

FILOZOFICKÁ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY
V PRAZE

Slabě implikativní logiky. Úvod do abstraktního studia výrokových logik

Petr Cintula, Ústav informatiky, AV ČR

Carles Noguera, Ústav teorie informace a automatizace, AV ČR

Tato kniha vznikla v rámci řešení projektu OPVK „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia“, číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0216.

Lektorovali:
doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
prof. RNDr. Jaroslav Peregrin, DSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, nám. Jana Palacha 2, Praha 1

Z anglického rukopisu přeložil Tomáš Lávička

Sazba v TEX: Petr Cintula
Vydání první, Praha 2015
ISBN 978-80-7308-576–6

Předmluva

Tento text je úvod do obecného studia *výrokových logik*. Každý nejspíš zná aspoň jednu výrokovou logiku, a to *klasickou* výrokovou logiku s její sémantikou založenou na dvou hodnotách pravda–nepravda a její korektní a úplnou axiomatizaci. V minulosti byla navržena řada dalších výrokových logik, a to většinou oslabením axiomatizace logiky klasické (např. intuicionisté odmítli axiom vyloučeného třetího $\varphi \vee \neg\varphi$, relevantisté axiom oslabení $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ a někteří jiní logici dokonce i princip sporu $\varphi \wedge \neg\varphi \to \overline{0}$ atd.), rozšířením množiny spojek (zejména různé modální logiky) nebo uvažováním bohatší sémantiky s více pravdivostními hodnotami (Łukasiewiczova nebo Kleeneho trojhodnotové logiky, Łukasiewicz-Tarského nekonečněhodnotová logika atd.).

Cílem tohoto textu *není* studovat motivace pro zavedení konkrétních neklasických výrokových logik ani tyto logiky samotné. Cílem *je* obecné matematické studium všech možných výrokových logik a představení řady obecných výsledků, které byly v minulosti často dokazovány znovu a znovu pro jednotlivé logiky. Je zřejmé, že aby toto studium mohlo být *matematické*, musíme v první řadě definovat výrokové logiky jako matematické objekty. Z řady možností vybíráme Tarského pojem relace důsledku, protože dle našeho názoru nejlépe odráží základní intuici logiky jakožto vědy o správném usuzování, tj. vědy o tom, jaké závěry *plynou* z dané množiny předpokladů.

S takto formálně vymezeným oborem studia se v první kapitole pustíme do obecného studia výrokových logik jakožto teorie relací důsledku. Uvedeme základní syntaktické a sémantické pojmy a dále dokážeme větu o úplnosti vůči sémantice takzvaných logických matic. Logická matice je dvojice tvořená algebrou (jejíž rolí je poskytovat množinu pravdivostních hodnot a interpretace logických spojek, proměnných a formulí) a množinou jejích prvků (chápaných jako „pravdivé“ pravdivostní hodnoty). Dále definujeme důležitou třídu takzvaných *slabě implikativních logik*, která, jak ukážeme, obsahuje nejdůležitější příklady výrokových logik. Zhruba řečeno se jedná o logiky vybavené implikací s určitými minimálními vlastnostmi. Omezení na tyto logiky jednak zjednoduší formulace a důkazy řady tvrzení a dále poskytne zajímavý způsob klasifikace logik dle toho, jaké další vlastnosti jejich implikace má. Navíc pomocí implikace můžeme uspořádat pravdivostní hodnoty (řekneme, že jedna je menší než druhá, pokud je jejich implikace pravdivá), což (jak uvidíme) bude zásadní v následujících kapitolách.

Ve druhé kapitole budeme studovat takzvané *substrukturální logiky*, což je široká, a v literatuře široce studovaná, speciální třída slabě implikativních logik. Zhruba řečeno se zde budeme zabývat interakcí implikace a ostatních běžných spojek, jako je konjunkce, disjunkce, negace. Uvidíme, že některé vlastnosti těchto spojek známé z klasické logiky není možné realizovat pomocí jedné spojky a musíme uvažovat spojek více. Konkrétně nás bude zajímat disjunkce, která jednak vyjadřuje supremum pravdivostních hodnot vůči uspořádání danému implikací (tj. splňuje axiomy $\varphi \to \varphi \vee \psi$ a $\psi \to \varphi \vee \psi$ a pravidlo „z $\varphi \to \chi$ a $\psi \to \chi$ odvoď $\varphi \vee \psi \to \chi$“), ale také umožňuje takzvaný důkaz po případech (pokud lze χ odvodit z φ a také lze odvodit z ψ, pak lze odvodit z $\varphi \vee \psi$). Ukážeme, že zatímco disjunkce splňující první vlastnost je neproblematická, nalézt disjunkci splňující druhou vlastnost je v některých případech možné pouze za cenu velkého zobecnění pojmu „spojka“.

Ve třetí kapitole ukážeme, že přítomnost (zobecněné) disjunkce umožňující důkaz po případech v dané logice lze ekvivalentně charakterizovat pomocí řady jiných zajímavých logických a algebraických vlastností a dále má řadu důsledků, které jsou zajímavé samy o sobě a také budou hrát důležitou roli v další kapitole. Celá tato kapitola je proto zasvěcena abstraktnímu studiu zobecněných disjunkcí a klasifikaci logik dle toho jak „silné“ a „jednoduché“ disjunkce se v nich vyskytují.

Ve čtvré kapitole se seznámíme s další důležitou třídou logik, kterým budeme říkat *semilineární* logiky. Tyto logiky jsou v posledních desetiletích intenzivně studovány v rámci takzvané *matematické fuzzy logiky* a jejich esenciální vlastností je, že mají úplnou sémantiku založenou na lineárně uspořádaných maticích (tj. takových, kde jsou každé dvě pravdivostní hodnoty porovnatelné). Ukážeme si řadu ekvivalentních definic této třídy logik a uvidíme, že v těch nejzajímavějších hrají zásadní roli zobecněné disjunkce.

V závěrečné kapitole si přiblížíme historii obecného studia výrokových logik, uvedeme historické odkazy do literatury zavádějící použité pojmy a dokazující hlavní výsledky popsané v textu. Dále tato kapitola může sloužit jako inspirace pro čtenáře s hlubším zájmem o danou problematiku, který se zde může dozvědět, že řadu dosažených výsledků lze dokázat v ještě mnohem obecnější podobě, a nalézt odkazy na příslušnou literaturu.

⋄

Předpokládanými čtenáři tohoto textu jsou studenti matematiky, filosofie a informatiky se zájmem o neklasické logiky a jejich obecné studium. Text vznikl jako skriptum k jednosemestrálnímu kurzu a jedná se o první česky psaný text, který může sloužit jako úvod do takzvané abstraktní algebraické logiky, což je moderní odnož algebraické logiky snažící se porozumět obecnému vztahu logiky a algebry.

U čtenáře se kromě schopnosti číst matematické texty předpokládá pouze elementární znalost univerzální algebry a teorie svazů (viz např. klasické monografie [3, 6]); většina důkazů by měla být přístupná bez dalších matematických znalostí (pouze v několika málo případech je potřeba jistá znalost topologie nebo elementární teorie modelů).

Tento text vznikl překladem a podstatnou úpravou anglicky psané habilitační práce Petra Cintuly, která byla založena na jeho spolupráci s Carlesem Noguerou (zejména na kapitole [14] a článcích [11–13, 15].

Vlastní překlad provedl Tomáš Lávička, který také navrhl řadu věcných vylepšení textu. Za obojí mu patří naše díky. Zásadní pro výslednou podobu tohoto textu byla také naše jazyková korektorka Katrin Přikrylová, které tímto děkujeme. Dále bychom také rádi poděkovali oběma recenzentům Janu Kührovi a Jaroslavu Peregrinovi za jejich hodnotné připomínky, které výrazně přispěly k vylepšení textu.

Práce na překladu a úpravách textu (jak odborných, tak jazykových) byla podpořena projektem ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia“, který je spolufinancován z Evropského sociální fondu a státního rozpočtu České republiky.

Petr Cintula, Carles Noguera
autoři

Obsah

Kapitola 1

Slabě implikativní logiky

V této kapitole budeme studovat třídu matematických objektů, která bude ústředním bodem celého tohoto textu: třídu *slabě implikativních logik.* Naše studium zahájíme v první sekci představením základů teorie výrokových logik chápaných jako relace důsledku mezi množinami premis a jejich možnými důsledky. Uvedeme základní syntaktické a sémantické pojmy nezbytné pro tuto teorii a dále dokážeme, pro všechny výrokové logiky, větu o úplnosti vůči sémantice takzvaných logických matic, což jsou dvojice tvořené algebrou (jejíž rolí je poskytovat množinu pravdivostních hodnot a interpretace logických spojek, proměnných a formulí) a množinou jejích prvků (chápaných jako „pravdivé“ pravdivostní hodnoty).

V druhé sekci zavedeme třídu *slabě implikativních logik* a ukážeme, že tato třída obsahuje nejdůležitější příklady logik, které se vyskytují v literatuře. Tyto logiky jsou vybaveny implikací s určitými vlastnostmi, které umožňují snadno definovat speciální třídu takzvaných redukovaných matic. Jak uvidíme, tyto matice mají s danou logikou mnohem těsnější souvislost, a poskytují tak její mnohem přirozenější sémantiku. Sekci zakončíme důkazem (druhé) věty o úplnosti vůči redukovaným maticím.

V třetí sekci tuto větu o úplnosti ještě vylepšíme a ukážeme, že se lze omezit na takzvané subdirektně ireducibilní matice (například pro klasickou logiku takto dostáváme velmi dobře známou úplnost vůči dvouhodnotové sémantice).

V závěrečné čtvrté sekci si všimneme, že v maticích některých logik můžeme vyznačené „pravdivé“ prvky popsat jako řešení určitého systému rovnic. Díky tomu můžeme sémantiku těchto logik, kterým budeme říkat algebraicky implikativní logiky, založit přímo a pouze na příslušných algebrách.

1.1 Základní pojmy a první věta o úplnosti

V této úvodní části se seznámíme s nejzákladnějšími syntaktickými a sémantickými pojmy, které slouží jako obecný rámec pro studium výrokových logik, a ukážeme důkaz první verze věty o úplnosti.

DEFINICE 1.1.1 (Jazyk). Výrokový jazyk $\mathcal{L}$ *je* spočetný *typ neboli funkce* $ar\colon C_{\mathcal{L}} \to \mathsf{N}$, *kde* $C_{\mathcal{L}}$ *je spočetná množina symbolů zvaných* spojky*, která každé spojce přiřazuje její* aritu. *Nulárním spojkám říkáme* pravdivostní konstanty.

Pro jednoduchost píšeme $\langle c, n\rangle \in \mathcal{L}$, kdykoli $c \in C_{\mathcal{L}}$ a $ar(c) = n$. Omezení na spočetné jazyky je nutné jen ve velmi málo případech, ale usnadňuje formulaci řady definic a tvrzení a mnohé důkazy. To samé také platí pro následující omezení kardinality množiny proměnných. Poznamenejme, že všechny pojmy a výsledky v této kapitole na tato omezení nespoléhají.

DEFINICE 1.1.2 (Formule). *Nechť Var označuje pevně zvolenou nekonečnou spočetnou množinu symbolů, kterým říkáme* (výrokové) proměnné. *Množina* $Fm_{\mathcal{L}}$ *(výrokových)* formulí *ve výrokovém jazyce* $\mathcal{L}$ *je nejmenší množina, která obsahuje Var a je uzavřena na spojky z* $\mathcal{L}$ *neboli pro všechny* $\langle c, n\rangle \in \mathcal{L}$ *a pro všechny* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Fm_{\mathcal{L}}$*,* $c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *je formule.*

Pro další pokračování, počínajíc další definicí, bude vhodné ztotožnit množinu $Fm_{\mathcal{L}}$ s nosičem absolutně volné algebry $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$ typu $\mathcal{L}$ s množinou generátorů *Var*.[1] Proměnné budou nadále obvykle značeny malými písmeny latinské abecedy p, q, r, … Formule pak obvykle malými písmeny řecké abecedy φ, ψ, χ, … a jejich množiny velkými Γ, Δ, Σ, … Při psaní konkrétních formulí se budeme držet běžné konvence a pro binární spojky používat infixovou notaci (namísto prefixové), např. budeme psát $\varphi \to \psi$ místo $\to(\varphi, \psi)$.

PŘÍKLAD 1.1.3. Nejběžnějším příkladem výrokového jazyka je jazyk $\mathcal{L}_{\mathrm{CL}}$ sdílený *klasickou* a *intuicionistickou logikou* (viz příklad 1.1.19). Tento jazyk obsahuje tři binární spojky: $\to$ (implikace), $\wedge$ (konjunkce) a $\vee$ (disjunkce) a jednu nulární spojku $\overline{0}$ (falsum). Kromě těchto základních spojek můžeme zavést tři další *odvozené* spojky: binární $\equiv$ (ekvivalence), unární $\neg$ (negace) a nulární $\overline{1}$ (verum), tj. $\varphi \equiv \psi$ je zkratka za komplexní formuli $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$; $\neg\varphi$ je zkratka za $\varphi \to \overline{0}$ a $\overline{1}$ za $\overline{0} \to \overline{0}$. V případě klasické logiky samozřejmě platí, že i základní spojky jsou mezi sebou definovatelné: například $\varphi \vee \psi$ bychom mohli považovat za zkratku pro $(\varphi \to \overline{0}) \to \psi$. Stejné tvrzení o vzájemné definovatelnosti základních spojek již pro intuicionistickou logiku neplatí.

Při psaní formulí budeme aplikovat obvyklé konvence ohledně vynechávání závorek v závislosti na prioritě použitých spojek: spojky $\to$ a $\equiv$ mají nejmenší prioritu, poté ostatní binární spojky a nakonec $\neg$, která má největší prioritu. Píšeme tedy například $\neg\varphi \wedge \psi \to \varphi$ místo $((\neg\varphi) \wedge \psi) \to \varphi$. V případě složitějších formulí používáme někdy také hranaté závorky pro lepší zachycení struktury formule.

DEFINICE 1.1.4 (Substituce). *Nechť* $\mathcal{L}$ *je výrokový jazyk.* $\mathcal{L}$-substituce *je endomorfismus na algebře* $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$ *neboli zobrazení* $\sigma\colon Fm_{\mathcal{L}} \to Fm_{\mathcal{L}}$ *takové, že pro všechny* $\langle c, n\rangle \in \mathcal{L}$ *a všechny* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Fm_{\mathcal{L}}$ *platí:* $\sigma(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = c(\sigma(\varphi_1), \dots, \sigma(\varphi_n))$.

Protože každá $\mathcal{L}$-substituce je endomorfismus na volné $\mathcal{L}$-algebře, je kompletně určena hodnotami na množině svých generátorů (tj. výrokových proměnných).

DEFINICE 1.1.5 (Konsekuce). Konsekuce[2] *ve výrokovém jazyce* $\mathcal{L}$ *je dvojice* $\langle \Gamma, \varphi\rangle$*, kde* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$*. Konsekuci* $\langle \Gamma, \varphi\rangle$ *nazýváme* finitární*, pokud* Γ *je konečná.*

Místo „$\langle \Gamma, \varphi\rangle$“ píšeme „$\Gamma \rhd \varphi$“, formulím z množiny Γ se říká *premisy* a formuli φ se říká *závěr* konsekuce $\Gamma \rhd \varphi$. Za účelem zjednodušení budeme ztotožňovat formuli φ s konsekucí tvaru $\emptyset \rhd \varphi$.

[1] Připomínáme, že $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$ má nosič $Fm_{\mathcal{L}}$ a pro operace platí: $c^{\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

[2] Termín „konsekuce“ (angl. consecution) je převzat z [1].

Je zřejmé, že každá podmnožina $\mathcal{X}$ množiny všech konsekucí může být chápána jako relace mezi množinami formulí a formulemi. Budeme používat infixovou notaci, a tedy psát „$\Gamma \vdash_{\mathcal{X}} \varphi$“ místo „$\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{X}$“.

DEFINICE 1.1.6 (Logika). *Nechť $\mathcal{L}$ je výrokový jazyk. Množině konsekucí* L *v $\mathcal{L}$ říkáme* logika *v jazyce $\mathcal{L}$, když pro každé $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ jsou splněny následující podmínky:*

- *Když $\varphi \in \Gamma$, pak $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.* *(Reflexivita)*
- *Když $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ pro každou $\psi \in \Gamma$ a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, pak $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.* *(Řez)*
- *Když $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, pak $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma(\varphi)$ pro každou $\mathcal{L}$-substituci σ.* *(Strukturalita)*

Formulím φ, které splňují $\emptyset \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, říkáme teorémy *logiky* L.

Poznamenejme, že díky reflexivitě je každá logika neprázdná a společně s řezem implikuje, že každá logika je monotónní:

- Když $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a $\Gamma \subseteq \Delta$, pak $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. (Monotonie)

Lze snadno nahlédnout, že průnik libovolné třídy logik ve stejném jazyce je také logika. Povšimněme si rozdílu mezi zápisem „$\Gamma \rhd \varphi$“ (značící objekt) a „$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$“ (značící fakt, že $\Gamma \rhd \varphi \in \mathrm{L}$). Pokud jsou jazyk nebo logika, o kterých hovoříme, zřejmé z kontextu, vynecháváme parametry L nebo $\mathcal{L}$; tuto konvenci budeme uplatňovat i v dalších obdobných případech, kde bychom formálně měli používat indexů L nebo $\mathcal{L}$. Navíc místo „$\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$“, „$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$“ a „$\emptyset \vdash \varphi$“ píšeme pouze „$\Gamma, \Delta \vdash \varphi$“, „$\Gamma, \psi \vdash \varphi$“ a „$\vdash \varphi$“. Nakonec píšeme „$\Gamma \vdash \Sigma$“ místo „$\Gamma \vdash \chi$ pro každou $\chi \in \Sigma$“ a „$\Gamma \dashv\vdash \Sigma$“ místo „$\Gamma \vdash \Sigma$ a $\Sigma \vdash \Gamma$“.

PŘÍKLAD 1.1.7. Nyní ukážeme několik příkladů triviálních logik, které reprezentují extrémní případy definice logiky; později uvedeme příklady zajímavějších logik. Pro libovolný jazyk $\mathcal{L}$ uvažme:

- *nejmenší logiku* Min definovanou jako množinu všech konsekucí, jejichž závěr je mezi premisami (tj. $\Gamma \vdash_{\mathrm{Min}} \varphi$ právě tehdy, když $\varphi \in \Gamma$),
- *spornou logiku* Inc definovanou jako množinu všech konsekucí,
- *téměř spornou logiku* AInc definovanou jako množinu všech konsekucí s neprázdnou množinou premis.[3]

Dokázat, že tyto tři množiny konsekucí jsou opravdu logiky, je velmi snadné. Dále lze pro daný jazyk $\mathcal{L}$ ukázat následující:

- Min je nejmenší logika (ve smyslu, že je obsažena v každé logice téhož jazyka) a nemá žádné teorémy.
- Inc je největší logika (ve smyslu, že obsahuje každou logiku téhož jazyka) a je jedinou logikou, jejíž teorémy jsou všechny formule daného jazyka.
- AInc je největší logika bez teorémů.

Nyní zavedeme zásadní pojem takzvané (logické) *teorie*. Důležitost tohoto pojmu se stane zřejmá ve chvíli, kdy zavedeme Lindenbaumovy matice.

[3] Min je z angl. „minimum“, Inc z „inconsistent“ a AInc z „almost inconsistent“. (Pozn. překladatele.)

DEFINICE 1.1.8 (Teorie). Teorie *logiky* L *je libovolná množina formulí* T *taková, že kdykoli* $T \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$*, pak* $\varphi \in T$*. Symbolem* Th(L) *značíme množinu všech teorií logiky* L.

Teoriím se také někdy říká *deduktivně uzavřené množiny formulí*, obvykle je budeme značit velkými písmeny latinské abecedy $T, S, R, \dots$ Je zřejmé, že množina všech formulí je teorie (říkáme jí sporná teorie), a navíc lze snadno ukázat, že systém Th(L) je uzavřen na libovolné průniky, jedná se proto o uzávěrový systém.[4] Tudíž existuje přirozený pojem teorie generované danou množinu formulí Γ (tj. nejmenší teorie obsahující Γ), tuto teorii značíme $\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma)$ a lze snadno nahlédnout, že se jedná o množinu $\{\varphi \mid \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi\}$. Funkce Th_{L} je tedy uzávěrový operátor odpovídající uzávěrovému systému Th(L). Všimněme si, že množina všech teorémů logiky L je rovna množině $\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\emptyset)$ a je podmnožinou každé teorie T logiky L. Ještě poznamenejme, že $\mathrm{Th}(\mathrm{Min}) = \mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}})$, $\mathrm{Th}(\mathrm{AInc}) = \{Fm_{\mathcal{L}}, \emptyset\}$, $\mathrm{Th}(\mathrm{Inc}) = \{Fm_{\mathcal{L}}\}$.

Nyní zavedeme pojem axiomatického systému, bude se jednat o objekt stejného typu jako logika (množina konsekucí uzavřená na substituci), což nám usnadní formulování mnohých nadcházejících výsledků.

DEFINICE 1.1.9 (Axiomatický systém). *Nechť* $\mathcal{L}$ *je výrokový jazyk.* Axiomatický systém $\mathcal{AS}$ *v jazyce* $\mathcal{L}$ *je množina konsekucí* $\mathcal{AS}$ *uzavřená na libovolné substituce. Prvek* $\mathcal{AS}$ *tvaru* $\Gamma \rhd \varphi$ *nazýváme* axiom*, když* $\Gamma = \emptyset$*,* finitárním odvozovacím pravidlem*, když* Γ *je konečná množina, a* infinitárním odvozovacím pravidlem *v opačném případě. Říkáme, že axiomatický systém je* finitární*, pokud všechna jeho odvozovací pravidla jsou finitární.*

Všimněme si, že výše zavedená konvence nám umožňuje identifikovat konsekuci $\emptyset \rhd \varphi$ s formulí φ, tj. můžeme říkat, že formule φ je axiom. Axiomatický systém je obvykle zadán jako kolekce schémat axiomů a pravidel (kde pojmem *schéma* myslíme konsekuci a všechny její substituční instance), viz příklad 1.1.12.

DEFINICE 1.1.10 (Důkaz). *Nechť* $\mathcal{L}$ *je výrokový jazyk a* $\mathcal{AS}$ *axiomatický systém v jazyce* $\mathcal{L}$*.* Důkaz *formule* φ *z množiny formulí* Γ *v* $\mathcal{AS}$ *je fundovaný strom (strom bez nekonečných větví), jehož uzly jsou označeny formulemi tak, že*

- *jeho kořen je označený* φ *a listy axiomy* $\mathcal{AS}$ *nebo prvky z množiny* Γ *a*
- *kdykoli je nějaký uzel označen* ψ *a* $\Delta \neq \emptyset$ *je množina formulí označujících předcházející uzly, pak* $\Delta \rhd \psi \in \mathcal{AS}$*.*

Píšeme $\Gamma \vdash_{\mathcal{AS}} \varphi$*, když existuje důkaz formule* φ *z množiny formulí* Γ *v* $\mathcal{AS}$*.*

Formální důkaz tak může být nahlížen jako fundovaná relace (s listy jako minimálními prvky a s kořenem jako maximem), tedy můžeme dokazovat tvrzení o formulích indukcí podle složitosti jejich formálních důkazů. Všimněme si, že odvozovací pravidlo $\{\psi_1, \psi_2, \dots\} \rhd \varphi$ umožňuje zkonstruovat důkaz formule φ z Γ, když známe důkazy $\psi_1, \psi_2, \dots$ z Γ: pouze tyto důkazy spojíme dohromady do jednoho stromu a použijeme pravidlo $\{\psi_1, \psi_2, \dots\} \rhd \varphi$. Srovnejme s metapravidlem: „z $\Gamma \vdash \psi_1$, $\Delta \vdash \psi_2, \dots$ získej $\Sigma \vdash \varphi$“ nám pouze říká, že pokud existují důkazy $\psi_1, \psi_2, \dots$ z $\Gamma, \Delta, \dots$, pak existuje důkaz φ z Σ, ale žádným způsobem neudává, jak takový důkaz vypadá. Mohli bychom říci, že pravidla jsou odvození mezi *formulemi*, zatímco metapravidla jsou odvození mezi *konsekucemi*. Důležitý příklad metapravidla uvádíme v tvrzení 1.3.13, další v následujících kapitolách.

[4] Definice a základní pojmy z teorie uzávěrových systémů a operátorů jsou uvedeny v úvodu sekce 1.3.

Povšimněme si, že ve finitárním případě můžeme nahradit důkazový strom lineární posloupností formulí, a tak získat běžný pojem konečného důkazu:

TVRZENÍ 1.1.11 (Finitární důkaz). *Nechť $\mathcal{L}$ je výrokový jazyk, $\mathcal{AS}$ je* finitární *axiomatický systém v $\mathcal{L}$ a $\Gamma \cup \{\varphi\}$ je množina formulí. Pak $\Gamma \vdash_{\mathcal{AS}} \varphi$ právě tehdy, když existuje konečná posloupnost formulí končící φ taková, že každý její prvek ψ je buď axiom z $\mathcal{AS}$, formule z Γ, anebo existuje neprázdná množina formulí Δ, které se v posloupnosti vyskytují před ψ a $\Delta \rhd \psi \in \mathcal{AS}$.*

Důkaz. Pro důkaz jednoho směru si postačí uvědomit, že důkazy ve finitárních axiomatických systémech jsou vždy konečné (podle definice důkazový strom neobsahuje nekonečné větve a z finitarity víme, že každý uzel má konečně mnoho předchůdců, z Königova lemmatu tak vyplývá, že daný strom musí mít pouze konečně mnoho listů). Tudíž stačí formule označující tyto vrcholy vhodně uspořádat do posloupnosti a důkaz je hotov.

Druhý směr lze snadno dokázat indukcí: stačí ukázat, že každá formule v dané posloupnosti je dokazatelná z předpokladů Γ. □

Stejně jako v případě axiomatických systémů obvykle píšeme schémata důkazů místo konkrétních důkazů, jak ukazuje následující příklad.

PŘÍKLAD 1.1.12. Uvažme výrokový jazyk $\mathcal{L}_{\to}$ obsahující pouze jednu binární spojku $\to$ a axiomatický systém $\mathcal{BCK}$ v tomto jazyce skládající se z následujících axiomů (uvádíme je spolu s jejich tradičními jmény a symboly):

(B)	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	tranzitivita
(C)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$	záměna
(K)	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	oslabení

a z jednoho dedukčního pravidla zvaného *modus ponens* (značíme (MP)): $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

Poznamenejme, že tyto „axiomy“ jsou ve skutečnosti „axiomatickými schématy“: formule $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ je axiomem $\mathcal{BCK}$ pro každou dvojici formulí φ a ψ.

Dále ukážeme, že pro každou formuli φ platí $\vdash_{\mathcal{BCK}} \varphi \to \varphi$, a to tak, že uvedeme následující schéma důkazu v $\mathcal{BCK}$:

(a)	$\varphi \to ((\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to \varphi)$	(K)
(b)	$[\varphi \to ((\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)]$	(C)
(c)	$(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	(a), (b) a (MP)
(d)	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	(K)
(e)	$\varphi \to \varphi$	(c), (d) a (MP)

LEMMA 1.1.13. *Nechť $\mathcal{L}$ je výrokový jazyk a $\mathcal{AS}$ axiomatický systém v $\mathcal{L}$. Pak $\vdash_{\mathcal{AS}}$ je nejmenší logika obsahující $\mathcal{AS}$.*

Důkaz. Relace $\vdash_{\mathcal{AS}}$ je očividně logika a $\mathcal{AS} \subseteq \vdash_{\mathcal{AS}}$. Ukážeme, že když pro každou logiku L $\mathcal{AS} \subseteq \mathrm{L}$, pak $\vdash_{\mathcal{AS}} \subseteq \mathrm{L}$. Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathcal{AS}} \varphi$ neboli že existuje důkaz φ z Γ. Indukcí podle složitosti důkazu můžeme ukázat, že pro každou formuli ψ, která označuje nějaký uzel v důkazu, máme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi$, a tedy také $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. □

DEFINICE 1.1.14 (Prezentace, finitární logika). *Nechť* $\mathcal{L}$ *je výrokový jazyk,* $\mathcal{AS}$ *axiomatický systém v* $\mathcal{L}$ *a* L *logika v* $\mathcal{L}$. *Říkáme, že* $\mathcal{AS}$ *je* axiomatický systém *(nebo* prezentace*) logiky* L, *když* $\mathrm{L} = \vdash_{\mathcal{AS}}$. *Říkáme, že logika je* finitární, *když má nějakou finitární prezentaci.*

Každá logika má prezentaci, jelikož L chápána jako axiomatický systém je očividně prezentací logiky L samotné (díky lemmatu 1.1.13). Díky tvrzení 1.1.11 pak víme, že naše definice finitární logiky je ekvivalentní následující běžné definici tohoto pojmu:

LEMMA 1.1.15. *Nechť* L *je logika. Pak* L *je finitární právě tehdy, když pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *platí: když* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$*, pak existuje konečná* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *taková, že* $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.

PŘÍKLAD 1.1.16 (Pokračování příkladu 1.1.12). Nyní z předchozího lemmatu víme, že $\mathcal{BCK}$ definuje finitární logiku, značíme ji BCK. Pomocí níže uvedených axiomů zavedeme další logiky v jazyce $\mathcal{L}_{\to}$ (axiomy opět uvádíme i s jejich tradičními názvy).

(I)	$\varphi \to \varphi$	identita
(W)	$(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$	kontrakce
(P)	$((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$	Peircův zákon

Nejprve symbolem BCI označme logiku axiomatizovanou axiomatickým systémem, který vznikne z $\mathcal{BCK}$ nahrazením axiomu (K) slabším axiomem (I) (připomeňme, že tento axiom, jak jsme viděli v příkladě 1.1.12, je teorémem logiky BCK). Zadruhé symboly BCI$\mathcal{X}$ a BCK$\mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je podmnožina {(W), (P)}, značíme logiky axiomatizované přidáním axiomů z $\mathcal{X}$ k axiomatizaci BCI, respektive BCK.

DEFINICE 1.1.17 (Finitární fragment). Finitární fragment *logiky* L *je logika* $\mathcal{FC}(\mathrm{L})$ *definovaná jako:* $\Gamma \vdash_{\mathcal{FC}(\mathrm{L})} \varphi$ *právě tehdy, když existuje konečná podmnožina* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *taková, že* $\Gamma_0 \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.

Poznamenejme, že finitární fragment logiky L je nejsilnější finitární logika obsažená v L a její zřejmou axiomatikou je množina všech finitárních konsekucí dokazatelných v L.

DEFINICE 1.1.18 (Rozšíření). *Nechť* $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ *jsou výrokové jazyky,* L_1 *logika v* $\mathcal{L}_1$, L_2 *logika v* $\mathcal{L}_2$ *a* $\mathcal{S}$ *množina konsekucí v* $\mathcal{L}_2$. *Řekneme, že*

- L_2 *je* rozšíření L_1 o $\mathcal{S}$, *pokud je nejmenší logikou v jazyce* $\mathcal{L}_2$ *obsahující* L_1 *a* $\mathcal{S}$ *neboli logika axiomatizovaná všemi* $\mathcal{L}_2$*-substitučními instancemi konsekucí z* $\mathcal{S} \cup \mathcal{AS}$*, pro libovolnou prezentaci* $\mathcal{AS}$ *logiky* L_1,
- L_2 *je* rozšíření L_1, *pokud je to rozšíření* L_1 *o nějakou množinu konsekucí (nebo ekvivalentně: pokud platí* $\mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}_2$*),*
- L_2 *je* axiomatické rozšíření L_1, *pokud je to rozšíření* L_1 *o množinu* axiomů,
- L_2 *je* konzervativní rozšíření L_1, *pokud je to rozšíření a pro každou konsekuci* $\Gamma \rhd \varphi$ *z* $\mathcal{L}_1$ *platí: kdykoli* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}_2} \varphi$*, pak také* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}_1} \varphi$. *Logiku* L_1 *pak nazýváme* $\mathcal{L}_1$*-fragmentem* L_2.

Když $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$*, píšeme „extenze“ místo „rozšíření“.*[5]

Všimněme si například, že všechny logiky BCI$\mathcal{X}$ a BCK$\mathcal{X}$ jsou axiomatickými *extenzemi* logiky BCI. Nyní zavedeme dvě významná axiomatická *rozšíření* těchto logik.

[5]Povšimněme si, že každá *konzervativní extenze* libovolné logiky je právě ona logika sama.

PŘÍKLAD 1.1.19. Mějme jazyk klasické logiky $\mathcal{L}_{\mathrm{CL}}$, který rozšiřuje implikační jazyk $\mathcal{L}_{\to}$, a uvažme následující formule:

$$\begin{array}{lll}
\overline{0} \to \varphi & \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi) & \\
\varphi \wedge \psi \to \varphi & \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi & (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \\
\varphi \to \varphi \vee \psi & \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi & (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)
\end{array}$$

Vezmeme-li všechny tyto formule jako axiomy společně s (B), (C), (K) a (W) a jediným dedukčním pravidlem *modus ponens*, získáme dobře známou prezentaci intuicionistické logiky IL. Dále je známo, že přidáním Peircova zákona (P) k libovolné axiomatizaci intuicionistické logiky dostaneme prezentaci klasické logiky CL (ačkoli tato prezentace není v literatuře běžná). Později ukážeme úplnost tohoto axiomatického systému vzhledem ke klasické dvouhodnotové sémantice, čímž ukážeme, že se vskutku jedná o prezentaci klasické logiky.

Navíc lze také ukázat (ačkoli my se tím zde zabývat nebudeme), že logiky BCKW a BCKWP jsou implikační fragmenty intuicionistické a klasické logiky.

Nyní se seznámíme s nezbytnými sémantickými pojmy. Uvažujme pevně zvolený jazyk $\mathcal{L}$. Sémantická interpretace pro logiky v tomto jazyce je zprostředkována pomocí takzvaných *logických matic*, což jsou dvojice tvořené $\mathcal{L}$-algebrou (kterou používáme k interpretaci formulí využívajíce faktu, že výrokový jazyk $\mathcal{L}$ je definován jako algebraický typ) a podmnožinou nosiče algebry (jejímž prostřednictvím definujeme pojem pravdivosti v dané matici):

DEFINICE 1.1.20 (Logická matice). $\mathcal{L}$-matice *je dvojice* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$*, kde* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra, které říkáme* algebraický redukt $\mathbf{A}$*, a* F *je podmnožina* A*, které říkáme* filtr *na* $\mathbf{A}$*. Prvkům z* F *říkáme* vyznačené prvky $\mathbf{A}$.

Maticím, kde $A = F$*, říkáme* triviální*, těm, kde* A *je konečná množina, říkáme* konečné *a těm, kde* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$*, říkáme* Lindenbaumovy.

DEFINICE 1.1.21 (Ohodnocení). *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra.* $\boldsymbol{A}$-ohodnocení *je homomorfismus z* $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$ *do* $\boldsymbol{A}$ *neboli zobrazení* $e\colon Fm_{\mathcal{L}} \to A$ *takové, že pro každé* $\langle c, n\rangle \in \mathcal{L}$ *a pro každou* n*-tici formulí* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *máme:* $e(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = c^{\boldsymbol{A}}(e(\varphi_1), \ldots, e(\varphi_n))$.

Jelikož stejně jako v případě substituce je $\boldsymbol{A}$-ohodnocení zobrazení z volné $\mathcal{L}$-algebry, je plně určeno hodnotami na množině generátorů (tzn. na výrokových proměnných). Zápis $e[p{\to}a]$ značí ohodnocení získané z ohodnocení e přiřazením prvku $a \in A$ proměnné p a ponecháním ostatních proměnných nezměněných. Pro formuli φ sestavenou z proměnných $p_1, \ldots, p_n$, algebru $\boldsymbol{A}$, prvky $a_1, \ldots, a_n \in A$ a $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e(p_i) = a_i$, budeme psát $\varphi^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ místo $e(\varphi(p_1, \ldots, p_n))$. Pro matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ a $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e budeme e také nazývat $\mathbf{A}$*-ohodnocení*. Pokud pro $\mathbf{A}$-ohodnocení e platí, že $e(\varphi) \in F$, říkáme, že e splňuje formuli φ v matici $\mathbf{A}$.

DEFINICE 1.1.22 (Sémantický důsledek). *Formule* φ *je* sémantickým důsledkem *množiny formulí* Γ *vzhledem ke třídě* $\mathcal{L}$*-matic* $\mathbb{K}$*, což značíme* $\Gamma \models_{\mathbb{K}} \varphi$*, pokud pro každou matici* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbb{K}$ *a každé* $\boldsymbol{A}$*-ohodnocení* e *máme* $e(\varphi) \in F$*, kdykoli* $e[\Gamma] \subseteq F$.

Píšeme $\models_{\mathbf{A}}$ místo $\models_{\{\mathbf{A}\}}$ a $\models_{\mathbb{K}} \varphi$ místo $\emptyset \models_{\mathbb{K}} \varphi$. Je očividné, že $\models_{\mathbb{K}}$ je množina konsekucí, jejichž závěr je splněn každým ohodnocením, které splňuje všechny její předpoklady. Lze ukázat, že tato množina je pro každou volbu $\mathbb{K}$ logikou, která je dokonce finitární, pokud $\mathbb{K}$ je konečná množina konečných matic (v tvrzení 1.3.16 toto ukážeme pro obecnější třídy $\mathbb{K}$).

TVRZENÍ 1.1.23. *Nechť* $\mathbb{K}$ *je třída* $\mathcal{L}$*-matic. Pak* $\models_{\mathbb{K}}$ *je logika v* $\mathcal{L}$*. Navíc pokud* $\mathbb{K}$ *je konečná třída konečných matic, pak logika* $\models_{\mathbb{K}}$ *je finitární.*

Důkaz. Musíme ověřit tři vlastnosti z definice logiky. Že platí reflexivita, je zřejmé. Pro dokázání řezu zvolme $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbb{K}$ a $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e[\Delta] \subseteq F$. Poté zřejmě platí $e(\psi) \in F$ pro každou $\psi \in \Gamma$ neboli $e[\Gamma] \subseteq F$, a tedy $e(\varphi) \in F$. Strukturalita: vezměme $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ a e jako předtím a předpokládejme, že $e(\sigma[\Gamma]) \subseteq F$. Jelikož $e' = e \circ \sigma$ je $\boldsymbol{A}$-ohodnocení a $e'[\Gamma] \subseteq F$, získáme $e(\sigma(\varphi)) = e'(\varphi) \in F$.

Druhé tvrzení: tvrzení stačí ukázat pro $\mathbb{K} = \{\langle \boldsymbol{A}, F\rangle\}$ a důkaz je hotov díky následujícímu pozorování: (1) $\models_{\mathbb{K}\cup\mathbb{L}} \; = \; \models_{\mathbb{K}} \cap \models_{\mathbb{L}}$ a (2) průnik dvou finitárních logik je finitární logika. Předpokládejme tedy pro spor, že $\Gamma' \not\models_{\mathbb{K}} \varphi$ pro každou konečnou $\Gamma' \subseteq \Gamma$, ukážeme, že $\Gamma \not\models_{\mathbb{K}} \varphi$.

Uvažujme konečnou množinu A vybavenou diskrétní topologií a její mocninu A^{Var} s produktovou (= slabou) topologií. Oba prostory jsou kompaktní (první triviálně a druhý díky Tichonovově větě). Je zřejmé, že každé ohodnocení e lze ztotožnit s prvkem A^{Var} a naopak. Pro každou formuli ψ definujeme ohodnocení $H_\psi \colon A^{Var} \to A$ jako $H_\psi(e) = e(\psi)$. Lze snadno ověřit, že tato zobrazení jsou spojitá, tedy $(H_\psi)^{-1}[F]$ je uzavřená množina a stejně tak i množina $(H_\psi)^{-1}[F] \cap (H_\varphi)^{-1}[A \setminus F]$ (neboli množina ohodnocení, která splňují formuli ψ, ale nesplňují formuli φ). Nyní uvažme množinu uzavřených množin $\{(H_\psi)^{-1} \cap (H_\varphi)^{-1}[A \setminus F] \mid \psi \in \Gamma\}$. Tato množina očividně tvoří centrovaný systém: průnik libovolného konečného podsystému (daného konečnou množinou Γ') je neprázdný, protože obsahuje každé ohodnocení, které je svědkem toho, že $\Gamma' \not\models_{\mathbb{K}} \varphi$. Tedy, díky kompaktnosti A^{Var}, průnik celého systém je neprázdný, tím je důkaz hotov (každý prvek tohoto průniku je ohodnocení splňující množinu Γ a zároveň nesplňující φ). □

Můžeme si pokládat samozřejmou otázku: jaké logické matice jsou možnou sémantikou dané logiky? Tuto otázku můžeme nahlížet ze dvou perspektiv. Zaprvé: pro danou logiku L a matici $\mathbf{A}$ se můžeme ptát, zdali je logika L *korektní* vůči sémantice dané maticí $\mathbf{A}$ (tj. zdali L $\subseteq \models_{\mathbf{A}}$); takové matice budeme nazývat modely logiky L. Zadruhé: pro danou logiku L a algebru $\boldsymbol{A}$ se můžeme ptát, jaké podmnožiny algebry $\boldsymbol{A}$ mohou být uvažovány jako vyznačené prvky *nějakého* modelu logiky L s algebraickým reduktem $\boldsymbol{A}$. Formálně definujeme:

DEFINICE 1.1.24 (Model a logický filtr). *Nechť* L *je logika v* $\mathcal{L}$*,* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra a* $F \subseteq A$*. Říkáme, že matice* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ *je* L-model *a množina* F *je* L-filtr*, pokud platí* L $\subseteq \models_{\mathbf{A}}$ *(tj. pro každou konsekuci* $\Gamma \rhd \varphi$ *platí, že* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *implikuje* $\Gamma \models_{\mathbf{A}} \varphi$*).*

Třídu všech L*-modelů značíme* **MOD**(L) *a množinu všech* L*-filtrů nad* $\boldsymbol{A}$ *budeme značit* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.

Někdy místo L-model říkáme, že $\mathbf{A}$ je model logiky L. Všimněme si, že pro každou prezentaci $\mathcal{AS}$ logiky L platí: $\mathbf{A} \in$ **MOD**(L) právě tehdy, když $\mathcal{AS} \subseteq \models_{\mathbf{A}}$ (jeden směr je zřejmý, druhý platí díky lemmatu 1.1.13).

Lze snadno nahlédnout, že pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ platí: $\mathcal{F}i_{\mathrm{Min}}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{F}i_{\mathrm{Inc}}(\boldsymbol{A}) = \{A\}$ a $\mathcal{F}i_{\mathrm{AInc}}(\boldsymbol{A}) = \{A, \emptyset\}$. V dalším tvrzení se zaměříme na zajímavější případy, ve kterých lze mimo jiné najít důvod pro označení ‚filtr'.

TVRZENÍ 1.1.25. *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}_{\mathrm{CL}}$*-algebra a* $F \subseteq A$*.*

- *Pokud* $\boldsymbol{A}$ *je Heytingova algebra, pak* F *je* IL*-filtr právě tehdy, když je to svazový filtr.*
- *Pokud* $\boldsymbol{A}$ *je Booleova algebra, pak* F *je* CL*-filtr právě tehdy, když je to svazový filtr.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ je Heytingova algebra a F je IL-filtr (tj. $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$). Ověříme, že F je svazový filtr, tj. nahoru usměrněná množina uzavřená na průseky a obsahující prvek $\overline{1}$. Protože $p \to p$ je teorémem IL (jak jsme ukázali v příkladu 1.1.12), máme pro každé $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e, $e(p \to p) \in F$, a tedy $e(p \to p) = e(p) \to e(p) = \overline{1} \in F$. Pokud $a \in F$ a $a \leq b$, pak $a \to b = \overline{1} \in F$, a tedy (jelikož $p, p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} q$ (*modus ponens*)) vezmeme-li $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e(p) = a$ a $e(q) = b$, dostaneme $b \in F$. Nakonec lze pomocí axiomu $p \to (q \to p \wedge q)$ a pravidla *modus ponens* snadno ukázat $p, q \vdash_{\mathrm{IL}} p \wedge q$, a proto (opět užitím stejného ohodnocení) platí: pokud $a, b \in F$, pak $a \wedge b \in F$.

Nyní naopak předpokládejme, že F je svazový filtr na $\boldsymbol{A}$ a máme ukázat $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$. Vezměme libovolné $a, b \in A$. Máme $a \wedge b \leq a \wedge b$, a tedy (užitím reziduace) také $a \leq b \to a \wedge b$ a $a \to (b \to a \wedge b) = \overline{1} \in F$. To znamená, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$ je modelem axiomu $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$. Pro všechny zbývající axiomy lze obdobně ukázat, užitím vlastností Heytingových algeber, že jejich hodnota vůči libovolnému ohodnocení je vždy rovna $\overline{1}$. Ukázat, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$ je modelem pravidla *modus ponens*, je také snadné: kdykoli $a, a \to b \in F$, pak užitím $a \wedge (a \to b) \leq b$ dostaneme také $b \in F$. Tím jsme ukázali $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$.

Důkaz druhého tvrzení je snadný: implikaci zleva doprava jsme již vlastně dokázali v předchozí části důkazu (protože každá Booleova algebra je také Heytingova algebra a každý CL-filtr je též IL-filtr). Analogicky pro druhý směr víme, že F je IL-filtr, a abychom ukázali, že to je CL-filtr, stačí dokázat, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ je také modelem Peircova zákona. Zde si stačí všimnout, že pro každou dvojici $a, b \in A$ máme: $(a \to b) \to a = (a \wedge \neg b) \vee a \leq a \vee a = a$, tedy $((a \to b) \to a) \to a = \overline{1}$. □

Pojem modelu, který jsme právě definovali, je pro praktické využití příliš *široký*, protože nijak nevymezuje třídu algeber, na kterých může být založen. V tvrzení 1.1.30 ukážeme, že každá logika má modely dokonce na absolutně volné algebře (která záleží pouze na jazyku a jinak nemá s danou logikou vůbec nic společného). Ilustrativní je též následující příklad, kde popíšeme model klasické logiky, který je založen na Heytingově algebře, která není Booleovou algebrou.

PŘÍKLAD 1.1.26. Uvažme Heytingovu algebru $[0,1]_{\mathrm{G}}$ s reálným jednotkovým intervalem jako nosičem, s operacemi $\wedge$ a $\vee$ definovanými jako minimum a maximum, konstantami $\overline{0}$ a $\overline{1}$ interpretovanými jako 0 a 1 a s $\to$ definovanou jako $a \to b = 1$, pokud $a \leq b$, a $a \to b = b$ v opačném případě. Ukážeme $\mathbf{A} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}}, (0,1]\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{CL})$. Z předchozího tvrzení víme, že $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$, stačí nám tedy ukázat: $\models_{\mathbf{A}} ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$. Pokud $e(\varphi) > 0$, pak zřejmě $e(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi) > 0$. Pokud $e(\varphi) = 0$, pak $e(\varphi \to \psi) = 1$, $e((\varphi \to \psi) \to \varphi) = 0$, a tedy $e(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi) = 1 > 0$.

Dříve než dokážeme první větu o úplnosti, ukážeme nějaké další výsledky a zavedeme nové pojmy, kterých budeme v dalším textu využívat.

LEMMA 1.1.27. *Nechť* L *je logika v* $\mathcal{L}$ *a zobrazení* $g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *je homomorfismus* $\mathcal{L}$*-algeber* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. *Pak:*

- $\langle \boldsymbol{A}, g^{-1}[G]\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*, kdykoli* $\langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$.
- $\langle \boldsymbol{B}, g[F]\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*, kdykoli* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*,* g *je surjektivní a* $g(x) \in g[F]$ *implikuje* $x \in F$.

Důkaz. První tvrzení je jednoduché: Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a $e[\Gamma] \subseteq g^{-1}[G]$ pro nějaké $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e. Tedy $g[e[\Gamma]] \subseteq G$, což (protože $g \circ e$ je $\boldsymbol{B}$-ohodnocení a $\langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$) implikuje $g(e(\varphi)) \in G$, tj. $e(\varphi) \in g^{-1}[G]$.

Druhé tvrzení: Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ a pro $\boldsymbol{B}$-ohodnocení f platí $f[\Gamma] \subseteq g[F]$. Definujme $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e(v) = a$ pro nějaké a takové, že $g(a) = f(v)$ (takové a musí existovat, protože g je surjektivní). Dále indukcí ukážeme $f(\varphi) = g(e(\varphi))$. Základní krok je triviální. Předpokládejme $\varphi = c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Poté:

$$\begin{aligned} f(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) &= c^{\boldsymbol{B}}(f(\varphi_1), \dots, f(\varphi_n)) &&= c^{\boldsymbol{B}}(g(e(\varphi_1)), \dots, g(e(\varphi_n))) \\ &= g(c^{\boldsymbol{A}}(e(\varphi_1), \dots, e(\varphi_n))) &&= g(e(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n))). \end{aligned}$$

Z $g[e[\Gamma]] = f[\Gamma] \subseteq g[F]$ dostaneme $e[\Gamma] \subseteq F$. Tedy $e(\psi) \in F$, a tudíž nakonec platí $f(\psi) = g(e(\psi)) \in g[F]$. □

Všimněme si, že množina $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ je uzavřena na libovolné průniky a $A \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$, tzn. $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ je uzávěrový systém, a tak můžeme uvažovat $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ jako úplný svaz a používat pojem generovaného filtru.

DEFINICE 1.1.28 (Generované filtry a svazy logických filtrů). *Nechť* L *je logika v* $\mathcal{L}$ *a* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra. Pro* $X \subseteq A$ *definujeme* logický filtr generovaný X *jako* $\mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{L}}(X) = \bigcap\{F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \mid X \subseteq F\}$*. Dále* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ *obohatíme svazovou strukturou následujícím způsobem: pro každé* $F, G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$*,* $F \wedge G = F \cap G$ *a* $F \vee G = \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{L}}(F \cup G)$*.*

Prvky filtru generovaného množinou jsou charakterizovány následujícím tvrzením pomocí pojmu *důkazu v algebře*. Tento koncept lze vidět jako zobecnění pojmu důkazu uvedeného v definici 1.1.10 pro algebru formulí na libovolnou algebru daného typu.

TVRZENÍ 1.1.29 (Důkaz v algebře). *Nechť* L *je logika,* $\mathcal{AS}$ *je nějaká její prezentace,* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra a* $X \cup \{a\} \subseteq A$*. Definujme* $V_{\mathcal{AS}} \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ *jako*

$$\{\langle e[\Gamma], e(\psi)\rangle \mid e \text{ je } \boldsymbol{A}\text{-ohodnocení a } \Gamma \rhd \psi \in \mathcal{AS}\}.$$ [6]

Pak $a \in \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(X)$ *právě tehdy, když existuje fundovaný strom, kterému říkáme* důkaz prvku a z množiny X*, jehož uzly jsou označeny prvky z* A *tak, že*

- *jeho kořen je označen prvkem* a*, jeho listy jsou označeny prvky* x *takovými, že* $x \in X$ *nebo* $\langle \emptyset, x\rangle \in V_{\mathcal{AS}}$*,*
- *kdykoli je uzel označen* x *a* $Z \neq \emptyset$ *je množina prvků označujících jeho předchůdce, pak* $\langle Z, x\rangle \in V_{\mathcal{AS}}$*.*

Důkaz. Označme $D(X)$ množinu prvků z A, pro které existuje důkaz z X. Nejprve ukážeme, že $\mathcal{AS} \subseteq \models_{\langle \boldsymbol{A}, D(X)\rangle}$. Vezměme $\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{AS}$ a $\boldsymbol{A}$-ohodnocení h takové, že $h[\Gamma] \subseteq D(X)$. Pak pro každé $x \in h[\Gamma]$ existuje důkaz z X, a jelikož $\langle h[\Gamma], h[\varphi]\rangle \in V_{\mathcal{AS}}$, můžeme spojit tyto důkazy tak, že vytvoří důkaz pro $h(\varphi)$.

Tudíž $D(X) \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$, a jelikož $X \subseteq D(X)$, získáme $\mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{L}}(X) \subseteq D(X)$. Abychom ukázali opačný směr, uvažme $x \in D(X)$ a nějaký důkaz x z X a všimněme si, že pro každé y, které se v tomto důkazu objeví, můžeme snadno induktivně ukázat, že $y \in \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{L}}(X)$ (protože tato množina je uzavřena na všechna pravidla logiky L, konkrétně také na ty v $\mathcal{AS}$). □

[6] Poznamenejme, že když $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$, pak $V_{\mathcal{AS}} = \mathcal{AS}$.

Nyní ukážeme užitečnou charakteristiku filtrů Lindenbaumových matic.

TVRZENÍ 1.1.30. *Pro libovolnou logiku* L *v jazyce* $\mathcal{L}$ *platí,* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}) = \mathrm{Th}(\mathrm{L})$.

Důkaz. Nechť $\Gamma \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}})$, tzn. když $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, pak pro každé $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$-ohodnocení e máme $e(\varphi) \in \Gamma$, kdykoli $e[\Delta] \subseteq \Gamma$. Proto v konkrétním případě, kdy ohodnocení e je identita a $\Delta = \Gamma$, dostaneme $\varphi \in \Gamma$, a tudíž $\Gamma \in \mathrm{Th}(\mathrm{L})$.

Dále předpokládejme, že $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{L})$, $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a e je $\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$-ohodnocení takové, že $e[\Delta] \subseteq T$, tedy také $T \vdash_{\mathrm{L}} e[\Delta]$. Ze strukturality dále plyne $e[\Delta] \vdash_{\mathrm{L}} e(\varphi)$, a proto díky řezu $T \vdash_{\mathrm{L}} e(\varphi)$. Protože T je teorie, máme $e(\varphi) \in T$. □

Ukážeme, že doposud zavedené pojmy stačí k tomu, abychom získali první větu o úplnosti, a tímto pozorováním zakončíme tuto sekci.

VĚTA 1.1.31 (Úplnost vzhledem ke všem modelům). *Nechť* L *je logika. Pak pro každou množinu formulí* Γ *a každou formuli* φ *platí následující:* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *právě tehdy, když* $\Gamma \models_{\mathbf{MOD}(\mathrm{L})} \varphi$.

Důkaz. Implikace zleva doprava (často označovaná jako korektnost dané logiky vůči dané sémantice) je zřejmá. Pro důkaz druhého směru předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$, a definujme $T = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma)$. Víme, že $\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$, a tedy identické zobrazení je $\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle$-ohodnocení, které jsme potřebovali, abychom ukázali $\Gamma \not\models_{\mathbf{MOD}(\mathrm{L})} \varphi$. □

1.2 Slabě implikativní logiky a druhá věta o úplnosti

V této sekci budeme dále pokračovat ve studiu sémantiky výrokových logik založené na logických maticích. Naším cílem bude vylepšit první větu o úplnosti, proto zavedeme několik dalších sémantických pojmů, které nám umožní získat přirozenější sémantiku postavenou na omezenější třídě algeber a dokázat druhou větu o úplnosti. Ačkoli potřebné pojmy (Leibnizova kongruence, redukovaný model) by mohly být zavedeny pro libovolné logiky, dáváme přednost jednoduchosti a omezíme se rovnou na takzvané slabě implikativní logiky. Jedná se o logiky se speciální binární spojkou splňující minimální požadavky, aby si zasloužila označení implikace.

DEFINICE 1.2.1 (Slabě implikativní logika). *Nechť* L *je logika v jazyce* $\mathcal{L}$*. Pak říkáme, že* L *je* slabě implikativní logika*, pokud existuje binární spojka* $\to$ *(základní nebo definovatelná formulí se dvěma proměnnými v jazyce* $\mathcal{L}$*) taková, že:*

(R)	$\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \varphi$
(MP)	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$
(T)	$\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \chi$
(sCng)	$\varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}} c(\chi_1, \dots, \chi_i, \varphi, \dots, \chi_n) \to c(\chi_1, \dots, \chi_i, \psi, \dots, \chi_n)$ *pro každé* $\langle c, n\rangle \in \mathcal{L}$ *a každé* $0 \leq i < n$.

Použité zkratky zastupují pojmy: „reflexivita“, „*modus ponens*“, „tranzitivita“ a „symetrizovaná kongruence“. Spojku $\to$ nazýváme *slabou implikací* logiky L. V principu může být pro danou logiku takových implikací i více. Abychom zjednodušili značení, budeme odteď předpokládat, že každý jazyk obsahuje jednu pevně zvolenou spojku $\to$, která (pokud je daná logika slabě implikativní) je jednou z jejích slabých implikací. Tuto implikaci budeme nazývat *principální implikací* logiky. Všechny pojmy pak budou definované právě vzhledem k této konkrétní implikaci. Vyhneme se tak komplikacím s indexováním (pouze v ojedinělých případech, ve kterých bude zapotřebí mluvit o pojmech vztažených k různým slabým implikacím, budeme tyto pojmy indexovat pomocí indexů patřičných slabých implikací).

PŘÍKLAD 1.2.2. Jak klasická, tak i intuicionistická logika, stejně jako všechny logiky zavedené v příkladu 1.1.16 jsou slabě implikativní logiky s principální implikací $\to$. Logiky Min a AInc nemůžou být slabě implikativní, protože nemají žádné teorémy (a tedy žádná spojka nemůže splnit požadavek na reflexivitu). Naopak logika Inc je z triviálních důvodů slabě implikativní (samozřejmě za předpokladu, že v jazyce je alespoň jedna (více než) binární spojka).

Všimněme si, že v klasické logice je spojka ekvivalence $\equiv$ také slabá implikace, ačkoli se od spojky $\to$ podstatně liší svým logickým chováním (například pouze $\to$ splňuje $\varphi \vdash \psi \to \varphi$).

Nyní se budeme zabývat symetrizací slabé implikace $\to$ v logice L. Pro dvojici formulí φ, ψ používáme výrazu „$\varphi \leftrightarrow \psi$“ k označení množiny formulí $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$ (v souladu s předchozí konvencí výrazem $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$ míníme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$ a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi \to \varphi$).[7] Nyní snadno ukážeme, že se $\leftrightarrow$ chová jako kongruence.

VĚTA 1.2.3 (Vlastnost kongruence). *Pro každou slabě implikativní logiku* L*, formule φ, ψ, χ a formuli $\hat{\chi}$ získanou z formule χ nahrazením nějakého výskytu φ v χ formulí ψ platí:*

- $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \varphi$,
- $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \leftrightarrow \varphi$,
- $\varphi \leftrightarrow \delta, \delta \leftrightarrow \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$,
- $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \leftrightarrow \hat{\chi}$.

Využitím posledního bodu, kde $\chi = \varphi \to' \psi$, dostaneme důležitý důsledek:

DŮSLEDEK 1.2.4. *Nechť $\to$ a $\to'$ jsou dvě slabé implikace v logice* L*. Pak:*

$$\varphi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow' \psi.$$

Kdybychom tedy měli v logice dvě různé slabé implikace, chovala by se jejich symetrizace z hlediska dokazatelnosti stejně. Nyní s cílem získat lepší úplnou sémantiku pro slabě implikativní logiky zavedeme další důležité sémantické pojmy. Začneme definicí tzv. Leibnizovy kongruence[8], což je klíčový pojem pro naši snahu definovat smysluplnější sémantiku pro všechny logiky.

DEFINICE 1.2.5 (Leibnizova kongruence). *Nechť $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ je model slabě implikativní logiky* L*. Definujeme* maticové kvaziuspořádání $\leq_{\mathbf{A}}$ *matice* $\mathbf{A}$ *následovně: $a \leq_{\mathbf{A}} b$ právě tehdy, když $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$. Dále definujeme* Leibnizovu kongruenci $\Omega_{\mathbf{A}}(F)$ *matice* $\mathbf{A}$ *následovně: $\langle a, b\rangle \in \Omega_{\mathbf{A}}(F)$ právě tehdy, když $a \leq_{\mathbf{A}} b$ a $b \leq_{\mathbf{A}} a$.*

DEFINICE 1.2.6 (Logická kongruence). Logická kongruence *v matici $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ je kongruence θ na algebře $\boldsymbol{A}$ kompatibilní s F, tj. taková, že pro každé $a, b \in A$: když $a \in F$ a zároveň $\langle a, b\rangle \in \theta$, pak $b \in F$.*

[7]Všimněme si rozdílu mezi významem symbolů $\equiv$ a $\leftrightarrow$: první je odvozená spojka v jazyce klasické logiky $\mathcal{L}_{\mathrm{CL}}$, zatímco druhá je množina dvou formulí.

[8]Použití názvu *Leibnizova kongruence* je založeno na třetím tvrzení věty 1.2.7, které říká, že dva prvky jsou kongruentní tehdy a jen tehdy, pokud sdílí všechny vlastnosti vyjádřitelné v jazyku logických matic.

VĚTA 1.2.7 (Charakterizace Leibnizovy kongruence). *Kdykoli je* L *slabě implikativní logika a* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*, pak platí:*

- $\leq_{\mathbf{A}}$ *je kvaziuspořádání,*
- $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ *je největší logická kongruence na* $\boldsymbol{A}$*,*
- $\langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ *právě tehdy, když pro každou formuli* χ *a každé* $\mathbf{A}$*-ohodnocení e platí:* $e[p{\to}a](\chi) \in F$ *právě tehdy, když* $e[p{\to}b](\chi) \in F$.

Důkaz. Z vlastností (R) a (T) plyne, že $\leq_{\mathbf{A}}$ je kvaziuspořádání. $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ je kongruence díky (sCng) a navíc díky (MP) je i logická. Abychom ukázali, že je také největší, předpokládejme, že θ je logická kongruence na $\boldsymbol{A}$ a $\langle a, b\rangle \in \theta$. Protože $\langle a, a\rangle \in \theta$, máme také $\langle a \to^{\boldsymbol{A}} a, a \to^{\boldsymbol{A}} b\rangle \in \theta$. Jelikož θ je logická kongruence a $a \to^{\boldsymbol{A}} a \in F$, máme $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$. Obdobně ukážeme, že $b \to^{\boldsymbol{A}} a \in F$. Tudíž $\langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ neboli $\theta \subseteq \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$.

Poslední tvrzení: Jeden směr je přímý důsledek (sCng). Druhý směr: Uvažme ohodnocení $e(q) = b$ a formuli $p \to q$. Dostaneme $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$ právě tehdy, když $b \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$, tedy $a \leq_{\mathbf{A}} b$. Obdobně ukážeme $b \leq_{\mathbf{A}} a$ (pomocí ohodnocení $e(q) = a$), čímž je tvrzení dokázáno. □

Na rozdíl od původního, extrémně obecného pojmu logické matice budeme nyní restriktivnější a budeme požadovat, aby se v jejím algebraickém reduktu nevyskytovaly dva různé prvky, které jsou v dané matici Leibnizovsky kongruentní (tj. které nelze rozlišit pomocí jazyka logických matic). Uvidíme, že tento nový pojem tzv. redukované matice povede k omezenější a pro danou logiku přirozenější třídě algeber.

DEFINICE 1.2.8 (Redukovaný model, $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Říkáme, že* L*-model* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ *je* redukovaný*, pokud* $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ *je relace identity* $\mathrm{Id}_{\boldsymbol{A}}$*. Třída všech redukovaných modelů logiky* L *je značena* $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$*, třídu algebraických reduktů matic z* $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ *pak značíme* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$*. Algebrám z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ *říkáme* L-algebry.

Někdy, když je z kontextu zřejmé, o jaké logice je řeč, či to pro daný argument není podstatné, používáme také termín *redukovaná matice*. Povšimněme si, že redukovaný model libovolné logiky je netriviální právě tehdy, když jeho algebraický redukt má více než jeden prvek. Dále si všimněme, že redukované matice mohly být ekvivalentně zadefinovány jako matice, jejichž kvaziuspořádání je dokonce uspořádání, a že jejich definice nezávisí na použité slabé implikaci (viz důsledek 1.2.4). Abychom mohli ukázat nějaké zajímavé příklady tříd redukovaných modelů a jejich algebraických reduktů, potřebujeme nejprve dokázat jednoduché tvrzení týkající se rozšíření logiky BCK:

TVRZENÍ 1.2.9. *Nechť* L *je libovolné* rozšíření *logiky* BCK*. Pak pro každou* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ *existuje prvek* $a \in A$ *takový, že pro každou množinu* $F \subseteq A$*:* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ *právě tehdy, když* $F = \{a\}$*. Navíc* $a = b \to b$ *pro každé* $b \in A$*.*

Důkaz. Uvažme nějakou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ a množinu $G \subseteq A$ takovou, že $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. Nyní vezměme libovolné $b \in A$ a definujme $a = b \to b$ a $F = \{a\}$. Na jednu stranu, protože L rozšiřuje BCK, víme, že $a = b \to b \in G$ (plyne z faktu, že $\langle \boldsymbol{A}, G\rangle$ je modelem $\varphi \to \varphi$). Dále vezměme libovolné $c \in G$; protože $c \to (a \to c) \in G$, dostaneme $a \to c \in G$ (platí totiž $\varphi, \varphi \to \psi \models_{\mathbf{A}} \psi$), tj. $a \leq_{\mathbf{A}} c$. Obdobně lze dokázat $c \leq_{\mathbf{A}} a$, a tedy, protože $\mathbf{A}$ je redukovaná matice, dostaneme $a = c$. Tím jsme ukázali $G = \{a\} = \{b \to b\} = F$ pro každé b. □

Z předchozího tvrzení spolu s tvrzením 1.1.25 vyplývá pro každou Booleovu algebru $\boldsymbol{A}$: $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})$ právě tehdy, když $F = \{1\}$ (analogický výsledek dostaneme pro Heytingovy algebry a IL). Můžeme ale dokázat více:

TVRZENÍ 1.2.10. $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{CL}) = \mathbb{BA}$ *a* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{IL}) = \mathbb{HA}$.

Důkaz. Pokud $\boldsymbol{A} \in \mathbb{BA}$, dostaneme z předchozího pozorování $\langle \boldsymbol{A}, \{1\}\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})$, a tedy $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{CL})$. Naopak, vezměme $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{CL})$. Protože $\boldsymbol{A}$ je redukovaná, víme, že pro každé $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e máme $e(\varphi) = e(\psi)$, kdykoli $\vdash_{\mathrm{CL}} \varphi \leftrightarrow \psi$. Tedy k tomu, abychom ověřili, že $\boldsymbol{A}$ splňuje všechny rovnice Booleových algeber, stačí dokázat odpovídající ekvivalence v CL. Například pro libovolnou dvojici $a, b \in A$ ověřme, že $a \wedge b = b \wedge a$. Víme, že $\vdash_{\mathrm{CL}} p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ pro atomy p, q. K dokončení důkazu tak stačí uvážit $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e(p) = a$ a $e(q) = b$.

Případ intuicionistické logiky a Heytingových algeber je analogický. □

PŘÍKLAD 1.2.11. Jako další příklad spočítejme $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{BCK})$. Z tvrzení 1.2.9 víme, že pro každou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{BCK})$ musí existovat $a \in A$ takové, že $\{a\} \in \mathcal{F}i_{\mathrm{BCK}}(\boldsymbol{A})$, a platí $a = t \to t$ pro libovolné $t \in A$. Na druhou stranu využitím faktů, že $\langle \boldsymbol{A}, \{a\}\rangle$ je modelem axiomatického systému $\mathcal{BCK}$ (tj. axiomů (B), (C), (K) a pravidla *modus ponens*) a že se jedná o redukovaný model, dostaneme pro každé $x, y, z \in A$ těchto pět podmínek:

- $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = t \to t$
- $(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) = t \to t$
- $x \to (y \to x) = t \to t$
- pokud $(t \to t) \to x = t \to t$, pak $x = t \to t$
- pokud $x \to y = y \to x = t \to t$, pak $x = y$

Tyto podmínky jsou ve skutečnosti kvazirovnice, a tedy definují kvazivarietu algeber, které jsou v literatuře běžně známé jako BCK-*algebry* (ví se také, že se jedná o vlastní kvazivarietu, tj. není to varieta). Na druhou stranu, máme-li BCK-algebru $\boldsymbol{A}$, pak je zřejmé z podmínek, které ji definují, že (pro libovolné $t \in A$) platí $\langle \boldsymbol{A}, \{t \to t\}\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{BCK})$.

Nyní bychom se mohli mylně domnívat, že pro každou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{A})$ existuje jediný filtr F takový, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$, nebo dokonce, že F vždy musí být singleton. Na následujícím příkladu ukážeme, že tomu tak opravdu být nemusí.

PŘÍKLAD 1.2.12. Pro logiku BCI můžeme zadefinovat algebru $\boldsymbol{M}$ na nosiči $\{\top, t, f, \bot\}$, jejíž jediná operace je dána následující tabulkou:

$\to^{\boldsymbol{M}}$	$\top$	t	f	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
t	$\top$	t	f	$\bot$
f	$\top$	$\bot$	t	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Ověřit, že $\mathcal{F}i_{\mathrm{BCI}}(\boldsymbol{M}) = \{\{t, \top\}, \{t, f, \top\}, M\}$ a $\Omega_{\boldsymbol{M}}(\{t, \top\}) = \Omega_{\boldsymbol{M}}(\{t, f, \top\}) = \mathrm{Id}_{\boldsymbol{M}}$, ponecháme čtenáři jako jednoduché cvičení. Všimněme si, že jsme dokázali, že $\boldsymbol{M} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{BCI})$, a navíc máme na téže algebře dva různé redukované modely, jejichž filtry nejsou singletony.

V následujícím lemmatu ukážeme, jak lze libovolný model převést na redukovaný. Nejprve zavedeme následující značení: pro libovolnou matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ budeme psát $[a]_F = \{b \in A \mid \langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)\}$, $[F] = \{[a]_F \mid a \in F\}$ a $\mathbf{A}^* = \langle \boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F), [F]\rangle$.

LEMMA 1.2.13. *Nechť* L *je slabě implikativní logika a* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*, pak:*

1. *Pro každé* $a \in A$*:* $[a]_F \in [F]$ *právě tehdy, když* $a \in F$*.*
2. *Pro každé* $a, b \in A$*:* $[a]_F \leq_{\mathbf{A}^*} [b]_F$ *právě tehdy, když* $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$*.*
3. $\mathbf{A}^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$.

Důkaz. 1. Jeden směr platí přímo z definice. Pro druhý směr: Nechť $[a]_F \in [F]$. Z předpokladu víme, že $[a]_F = [b]_F$ pro nějaké $b \in F$. Tedy $\langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ a dále, protože $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ je logická kongruence, dostaneme $a \in F$.

2. Plyne z následujícího řetězu očividných ekvivalencí: $[a]_F \leq_{\mathbf{A}^*} [b]_F$ právě tehdy, když $[a]_F \to^{\boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)} [b]_F \in [F]$ právě tehdy, když $[a \to^{\boldsymbol{A}} b]_F \in [F]$ právě tehdy, když $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$.

3. Je zřejmé, že $[\cdot]_F$ je surjektivní homomorfismus z $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$. Z lemmatu 1.1.27 tedy dostaneme $\mathbf{A}^* \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$. Zbývá tedy ukázat, že matice $\mathbf{A}^*$ je redukovaná: z nerovností $[a]_F \leq_{\mathbf{A}^*} [b]_F$ a $[b]_F \leq_{\mathbf{A}^*} [a]_F$ plyne (díky předchozímu bodu), že $\langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, a tedy $[a]_F = [b]_F$. □

DEFINICE 1.2.14 (Leibnizův operátor). *Nechť* L *je slabě implikativní logika v jazyce* $\mathcal{L}$ *a* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra.* Leibnizův operátor *asociovaný s algebrou* $\boldsymbol{A}$ *je funkce, která každému* $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ *přiřadí Leibnizovu kongruenci* $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$*.*

TVRZENÍ 1.2.15. *Pro každou slabě implikativní logiku* L *v jazyce* $\mathcal{L}$ *a každou* $\mathcal{L}$*-algebru* $\boldsymbol{A}$ *platí:*

1. $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ *zachovává průseky, a tedy je monotónní (neboli: pro všechny* $F, G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ *platí* $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F \cap G) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(F) \cap \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$*, a pokud* $F \subseteq G$*, pak* $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) \subseteq \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$*).*
2. $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ *komutuje se vzory homomorfismů, tj. pro každou* $\mathcal{L}$*-algebru* $\boldsymbol{B}$*, každý homomorfismus* $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *a každý* $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{B})$ *platí* $\Omega_{\boldsymbol{A}}(h^{-1}[F]) = h^{-1}[\Omega_{\boldsymbol{B}}(F)] = \{\langle a, b\rangle \mid \langle h(a), h(b)\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{B}}(F)\}$.
3. $\Omega_{\boldsymbol{A}}[\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})] = \boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$*, kde* $\boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$ *značí inkluzí uspořádanou množinu všech kongruencí na algebře* $\boldsymbol{A}$*, jejichž faktor náleží do* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$. [9]

Důkaz. Důkaz prvních dvou tvrzení je snadný (při důkazu toho druhého použijeme fakt, že díky lemmatu 1.1.27 je $h^{-1}[F]$ filtr na $\boldsymbol{A}$). Pro důkaz třetího tvrzení pozorujme, že díky lemmatu 1.2.13 platí: $\Omega_{\boldsymbol{A}}[\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})] \subseteq \boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$. Pro důkaz druhého směru předpokládejme, že $\Theta \in \boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$. Víme, že $\boldsymbol{A}/\Theta \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$, tj. $\langle \boldsymbol{A}/\Theta, F_0\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ pro nějaký filtr F_0. Nechť k je kanonické zobrazení z $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{A}/\Theta$, definujme $F = k^{-1}[F_0]$ a (opět podle lemmatu 1.1.27) dostaneme, že $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Důkaz zakončíme následujícím pozorováním: $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(k^{-1}[F_0]) = k^{-1}[\Omega_{\boldsymbol{A}/\Theta}(F_0)] = k^{-1}[\mathrm{Id}_{\boldsymbol{A}/\Theta}] = \Theta$. □

V následující definici zavedeme velmi dobře známý pojem Lindenbaum-Tarského matic tak, jak se tradičně zavádí v literatuře, a ukážeme jeho souvislost s redukovanými maticemi.

[9] Později, po tvrzení 1.3.16, ukážeme, že $\boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$ je dokonce svaz.

DEFINICE 1.2.16 (Lindenbaum-Tarského matice). *Nechť* L *je slabě implikativní logika v jazyce* $\mathcal{L}$ *a* $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{L})$. *Pro každou formuli* φ *definujeme množinu*

$$[\varphi]_T = \{\psi \in Fm_{\mathcal{L}} \mid \varphi \leftrightarrow \psi \subseteq T\}.$$

Lindenbaum-Tarského matice teorie T, $\mathbf{LindT}_T$, *je* $\mathcal{L}$*-matice s filtrem* $\{[\varphi]_T \mid \varphi \in T\}$, *algebrou s nosičem* $\{[\varphi]_T \mid \varphi \in Fm_{\mathcal{L}}\}$ *a s operacemi* $c^{\mathbf{LindT}_T}([\varphi_1]_T, \dots, [\varphi_n]_T) = [c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]_T$.

Lze snadno nahlédnout, že pro každou teorii $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{L})$ je matice $\mathbf{LindT}_T$ shodná s maticí $\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle^*$. Nyní máme vše, co je potřeba k hlavnímu výsledku této sekce.

VĚTA 1.2.17 (Úplnost vzhledem k redukovaným modelům). *Nechť* L *je slabě implikativní logika v jazyce* $\mathcal{L}$, *pak pro každou množinu formulí* Γ *a každou formuli* φ *platí následující tvrzení:* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *právě tehdy, když* $\Gamma \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})} \varphi$.

Důkaz. Důkaz korektnosti je snadný. Pro opačný směr: Mějme teorii T generovanou Γ; díky lemmatu 1.2.13 zřejmě platí $\mathbf{LindT}_T \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. Uvažme $\mathbf{LindT}_T$-ohodnocení e definované jako $e(\psi) = [\psi]_T$, očividně platí : $e[\Gamma] \subseteq [T]$ (z lemmatu 1.2.13 víme: $e(\chi) \in [T]$ právě tehdy, když $\chi \in T$). Z předpokladu $\Gamma \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})} \varphi$ tak dostaneme, že $[\varphi]_T = e(\varphi) \in [T]$. Tedy $\varphi \in T$ a nakonec $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. □

Důkaz naznačuje, jak lze výsledek v teorému zesílit: každá slabě implikativní logika je úplná vzhledem ke třídě svých Lindenbaum-Tarského matic.

Tato druhá věta o úplnosti je důležitým zlepšením té první v tom smyslu, že se nám podařilo získat úplnou maticovou sémantiku založenou na třídě algeber $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$. Na příkladech jsme viděli, jak se to promítne v souvislosti s očekávanou algebraickou sémantikou pro prominentní logiky, jako je klasická a intuicionistická, kde opravdu dostaneme variety Booleových a Heytingových algeber. Na druhou stranu bychom rádi náš výsledek dále zesílili omezením se na nějakou konkrétní významnou podtřídu $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$, nebo dokonce na jednu konkrétní algebru. Například pro klasickou logiku bychom chtěli získat úplnost vůči matici založené na dvouhodnotové Booleově algebře. Tím jsme si vytyčili cíl pro další sekci.

1.3 Pokročilá sémantika a třetí věta o úplnosti

V této sekci nejprve zavedeme potřebné pojmy z teorie uzávěrových systémů a operátorů a poté dokážeme pro finitární slabě implikativní logiky třetí formu věty o úplnosti. Tím se nám konečně podaří zachytit sémantiku, která v případě klasické logiky odpovídá standardní dvouhodnotové sémantice. Důkaz této věty je dalším rozvedením předešlých důkazů vět o úplnosti, opět budeme využívat Lindenbaum-Tarského konstrukce, ale aby získaná redukovaná matice splňovala další dodatečné podmínky, musíme nejprve rozšířit původní teorii do větší speciální teorie. Z toho důvodu budeme muset zavést řadu dalších technických pojmů a ukázat odpovídají výsledek o rozšíření teorií, který (jak uvidíme) vyžaduje, aby uvažovaná výroková logika byla finitární.

DEFINICE 1.3.1 (Uzávěrový systém). Uzávěrový systém *na množině* A *je systém podmnožin* $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ *obsahující* A *uzavřený na libovolné průniky. Prvky* C *nazýváme* uzavřené množiny.

Jak jsme již viděli, pro každou logiku L v jazyce $\mathcal{L}$ a každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ platí, že $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ je uzávěrový systém na A; speciálně $Th(\mathrm{L})$ je uzávěrový systém na $Fm_{\mathcal{L}}$.

DEFINICE 1.3.2 (Uzávěrový operátor). *Mějme množinu A.* Uzávěrový operátor *na A je zobrazení $C\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ takové, že pro všechny $X, Y \subseteq A$:*

1. *$X \subseteq C(X)$,*
2. *$C(X) = C(C(X))$,*
3. *kdykoli $X \subseteq Y$, pak také $C(X) \subseteq C(Y)$.*

Každý uzávěrový operátor C definuje uzávěrový systém: $\{X \subseteq A \mid C(X) = X\}$. A naopak pro uzávěrový systém $\mathcal{C}$ na A můžeme snadno definovat příslušný uzávěrový operátor: $C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$. Tedy každý uzávěrový operátor lze uvažovat jako uzávěrový sytém a naopak. Uzávěrový operátor asociovaný s uzávěrovým systémem Th(L), jak jsme již viděli, značíme jako Th_{L}, obdobně operátor asociovaný k $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ značíme jako $\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}$; jako obvykle budeme při psaní vynechávat parametry, když bude vše jasné z kontextu.

Říkáme, že uzávěrový operátor C je *algebraický*, když pro každou $X \subseteq A$ platí $C(X) = \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X$ a Y je konečná$\}$. Dále říkáme, že uzávěrový systém $\mathcal{C}$ je *algebraický*, pokud je uzavřen na sjednocení nahoru usměrněných podsystémů (tj. podsystémů $\mathcal{D} \neq \emptyset$ takových, že pro každé $A, B \in \mathcal{D}$ existuje $C \in \mathcal{D}$ takové, že $A \cup B \subseteq C$).

VĚTA 1.3.3 (Schmidtova věta). *Uzávěrový operátor C je algebraický právě tehdy, když jeho asociovaný uzávěrový systém $\mathcal{C}$ je algebraický.*

Důkaz. Předpokládejme, že C je algebraický, a mějme nahoru usměrněný podsystém $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Stačí tedy ukázat, že $C(\bigcup \mathcal{D}) \subseteq \bigcup \mathcal{D}$. Vezměme libovolné $a \in C(\bigcup \mathcal{D})$. Z finitarity plyne, že $a \in C(a_1, \dots, a_n)$ pro nějaké $a_1, \dots, a_n \in \bigcup \mathcal{D}$. Jelikož $\mathcal{D}$ je nahoru usměrněný, existuje $X_0 \in \mathcal{D}$ takové, že $a_1, \dots, a_n \in X_0$. Z toho máme $a \in C(X_0) = X_0 \in \mathcal{D}$, a tedy můžeme uzavřít: $a \in \bigcup \mathcal{D}$. Naopak předpokládejme, že $\mathcal{C}$ je algebraický, uvažme libovolnou $X \subseteq A$ a definujme systém $\mathcal{D} = \{C(F) \mid F \subseteq X$ konečná$\}$. Protože $\mathcal{D}$ je zřejmě nahoru usměrněná, dostaneme $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{C}$, a proto $\bigcup \mathcal{D} = C(X)$. □

Všimněme si, že logika L je finitární právě tehdy, když její uzávěrový operátor Th_{L} je algebraický. Následující důsledek je první příklad takzvaných *vět o přenosu*: neboli vět, které přenášejí vlastnosti logiky L v jazyce $\mathcal{L}$ (chápané jako uzávěrový operátor/systém na množině formulí) na analogickou vlastnost na uzávěrovém operátoru/systému L-filtrů na *libovolné $\mathcal{L}$-algebře.*

DŮSLEDEK 1.3.4 (Přenos finitarity). *Pro danou logiku* L *v jazyce $\mathcal{L}$ je následující ekvivalentní:*

1. L *je finitární.*
2. $\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}$ *je algebraický uzávěrový operátor pro libovolnou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$.*
3. *$\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ je algebraický uzávěrový systém pro libovolnou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$.*

Důkaz. Ekvivalence druhého a třetího tvrzení je přímým důsledkem předchozí věty. Očividně 2 implikuje 1, stačí vzít $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$. Ukážeme, že 1 implikuje 3. Mějme nahoru usměrněný systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ a definujme $F = \bigcup \mathcal{F}$. Musíme ukázat, že $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a e je $\boldsymbol{A}$-ohodnocení takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$. Protože L je finitární, tak existuje konečná množina $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma_0 \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Poté, protože $\mathcal{F}$ je nahoru usměrněný, musí existovat $F_0 \in \mathcal{F}$ takový, že $e[\Gamma_0] \subseteq F_0$, a tedy $e(\varphi) \in F_0 \subseteq F$. □

Dalším důležitým pojmem v teorii uzávěrových systému je *báze*, což je speciální systém uzavřených množin, který umožňuje popsat každou uzavřenou množinu jako průnik svého podsystému.

DEFINICE 1.3.5 (Báze). Báze *uzávěrového systému C na A je libovolný podsystém $\mathcal{B} \subseteq C$ splňující některou z následujících ekvivalentních podmínek:*

1. *C je nejhrubší uzávěrový systém obsahující $\mathcal{B}$.*
2. *Pro každé $T \in C \setminus \{A\}$ existuje $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ takové, že $T = \bigcap \mathcal{D}$.*
3. *Pro každé $T \in C \setminus \{A\}$, $T = \bigcap\{B \in \mathcal{B} \mid T \subseteq B\}$.*
4. *Pro každé $Y \in C$ a $a \in A \setminus Y$ existuje $Z \in \mathcal{B}$ takové, že $Y \subseteq Z$ a $a \notin Z$.*

DEFINICE 1.3.6 (Saturované a (konečně) $\cap$-ireducibilní uzavřené množiny). *Prvek X uzávěrového systému C na A se nazývá*

- maximální vzhledem k *a, pokud je maximálním (v uspořádání daném inkluzí) prvkem v množině $\{Y \in C \mid a \notin Y\}$,*
- saturovaný*, pokud je maximální vzhledem k nějakému prvku a,*
- (konečně) $\cap$-ireducibilní*, pokud pro každou (neprázdnou konečnou) množinu $\mathcal{Y} \subseteq C$ takovou, že $X = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y$, existuje $Y \in \mathcal{Y}$ takové, že $X = Y$.*

Poznamenejme, že množina A je konečně $\cap$-ireducibilní, ale není $\cap$-ireducibilní (průnik prázdně množiny je roven množině A). Fakt, že X je konečně $\cap$-ireducibilní, může být ekvivalentně definován následujícím způsobem: pro každé $Y_1, Y_2 \in C$ takové, že $X = Y_1 \cap Y_2$, máme $X = Y_1$ nebo $X = Y_2$. Konečně $\cap$-ireducibilní prvky budeme, obzvlášť v logických kontextech (z důvodů, které budou zřejmé z dalších kapitol), označovat předponou *prvo-*, budeme tedy mluvit o prvofiltrech a prvoteoriích. V tvrzení 1.3.14 ukážeme, jak mohou být prvoteorie charakterizovány pomocí dobře známých vlastností v případě klasické a intuicionistické logiky.

TVRZENÍ 1.3.7. *Nechť C je uzávěrový systém na množině A a $T \in C$. Pak platí: T je saturovaná právě tehdy, když T je $\cap$-ireducibilní.*

Důkaz. Předpokládejme, že T není $\cap$-ireducibilní, tzn. existuje systém $\{T_i \mid i \in I\} \subseteq C$ takový, že $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ a $T \subsetneq T_i$ pro každé $i \in I$. Nyní můžeme pro každé $i \in I$ vybrat $b_i \in T_i \setminus T$, platí $T \subsetneq C(T, b_i) \subseteq T_i$; z toho dostaneme: $T = \bigcap\{C(T, b_i) \mid i \in I\}$, a tedy $T = \bigcap\{C(T, b) \mid b \notin T\}$. Pro spor předpokládejme, že T je maximální vzhledem k $a \in A$. Pak pro všechna $b \notin T$ máme $T \subsetneq C(T, b)$ a z maximality plyne: $a \in C(T, b)$. Proto $a \in \bigcap\{C(T, b) \mid b \notin T\} = T$; spor.

Naopak, nechť T je $\cap$-ireducibilní. Zřejmě $T \subsetneq \bigcap\{C(T, b) \mid b \notin T\}$, a tedy existuje $a \in \bigcap\{C(T, b) \mid b \notin T\} \setminus T$, což znamená, že T je maximální vzhledem k a. Opravdu: když $T' \in C$ a $T \subsetneq T'$, pak existuje $b \in T' \setminus T$ a z toho plyne $a \in C(T, b) \subseteq T'$. $\square$

Následující tvrzení nám umožňuje dokázat, že systém všech $\cap$-ireducibilních množin libovolného algebraického uzávěrového systému tvoří jeho bázi. Tento výsledek později použijeme k dalšímu zlepšení věty o úplnosti pro slabě implikativní logiky.

LEMMA 1.3.8 (Abstraktní Lindenbaumovo lemma). *Nechť* C *je algebraický uzávěrový operátor a* $\mathcal{C}$ *jeho přidružený uzávěrový systém. Pokud* $T \in \mathcal{C}$ *a zároveň* $a \notin X$*, pak existuje* $X' \in \mathcal{C}$*, pro které platí:* $X \subseteq X'$ *a zároveň* X' *je maximální vzhledem k* a*.*

Důkaz. Důkaz je snadnou aplikací Zornova lemmatu: Systém $\mathcal{A} = \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y \text{ a } a \notin Y\}$ je očividně neprázdný (např. $X \in \mathcal{A}$), a pokud vezmeme libovolný řetězec $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, tak dle Schmidtovy věty 1.3.3 platí $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{C}$ (každý řetězec je nahoru usměrněný) a navíc je zřejmé, že množina $\bigcup \mathcal{S}$ obsahuje X a neobsahuje a, a proto $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{A}$. Jelikož $\bigcup \mathcal{S}$ je horní závorou řetězce, jsou splněny všechny podmínky pro aplikaci Zornova lemmatu, z něhož tak plyne, že $\mathcal{A}$ má nějaký maximální prvek X', který má námi požadovanou vlastnost. □

DŮSLEDEK 1.3.9. *Pro každý algebraický uzávěrový operátor* C *a jeho odpovídající uzávěrový systém* $\mathcal{C}$ *platí, že třída všech* $\cap$*-ireducibilních (tj. saturovaných) prvků z* $\mathcal{C}$ *tvoří bázi* $\mathcal{C}$*.*

Pro mnoho výsledků je abstraktní Lindenbaumovo lemma zásadní, ale lze ho dokázat pouze pro finitární logiky. Později ale uvidíme, že pro důkaz některých jeho důsledků nám bude stačit slabší tvrzení, která platí i pro mnohé nefinitární logiky.

DEFINICE 1.3.10. *Říkáme, že uzávěrový systém* $\mathcal{C}$ *(nebo jeho přidružený uzávěrový operátor* C*) má* vlastnost IPEP[10]*, pokud třída všech konečně* $\cap$*-ireducibilních prvků z* $\mathcal{C}$ *tvoří bázi* $\mathcal{C}$*. Dále říkáme, že logika* L *má* IPEP*, pokud ji má uzávěrový systém* Th(L).

Všimněme si, že z předchozího důsledku plyne, že každá finitární logika má IPEP. Nyní uvedeme příklad logiky, která není finitární a zároveň má IPEP; později, v příkladu 3.1.18, uvedeme logiku, která nemá ani IPEP (díky větě 3.2.15). Třída logik s vlastností IPEP je tedy netriviálním rozšířením třídy finitárních logik.

PŘÍKLAD 1.3.11. *Standardní nekonečněhodnotová Łukasiewiczova logika* $Ł_\infty$ *má* IPEP*, ale není finitární.*[11] Logika $Ł_\infty$ má spojky $\to, \overline{0}$ a je určena maticí $\mathbf{A} = \langle\langle [0,1], \to^{\mathbf{A}}, \overline{0}^{\mathbf{A}}\rangle, \{1\}\rangle$, kde $x \to^{\mathbf{A}} y = \min\{1 - x + y, 1\}$ a $\overline{0}^{\mathbf{A}} = 0$. Je velmi dobře známo, že $Ł_\infty$ není finitární (důkaz lze nalézt např. v [32]); ukážeme, že má ale IPEP.

Pokud $T \nvdash_{Ł_\infty} \chi$, pak existuje ohodnocení e takové, že $e[T] = \{1\}$ a zároveň $e(\chi) \neq 1$. Definujme $T' = e^{-1}[\{1\}]$; očividně T' je teorie a navíc $T \subseteq T'$ a $T' \nvdash_{Ł_\infty} \chi$. Předpokládejme, že T' není prvoteorie; tedy existují formule $\varphi, \psi \notin T'$, které splňují: $T' = \mathrm{Th}_{Ł_\infty}(T, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{Ł_\infty}(T, \psi)$. Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že $e(\varphi) \leq e(\psi)$, tedy $e(\varphi \to \psi) = 1$, což znamená, že $\varphi \to \psi \in T'$. Z toho plyne $\psi \in \mathrm{Th}_{Ł_\infty}(T, \varphi)$ (kvůli $\varphi, \varphi \to \psi \vdash_{Ł} \psi$), a tedy $\psi \in T'$, což je spor s předpokladem $\psi \notin T'$.

LEMMA 1.3.12. *Nechť* L′ *je axiomatická extenze logiky* L*. Pak platí, že pokud* L *má* IPEP*, tak má* IPEP *také logika* L′*.*

Důkaz. Mějme L′-teorii T. Musí existovat množina L-prvoteorií $\mathcal{R}$ taková, že $T = \bigcap \mathcal{R}$ (protože T je samozřejmě také L-teorie). Z [18, Tvrzení 0.8.3.] víme, že všechny L-teorie obsahující T (konkrétně tedy i teorie z $\mathcal{R}$) jsou L′-teorie. K zakončení důkazu si stačí povšimnout, že pokud L′-teorie je prvoteorie v L, pak je také prvoteorií v L′. □

---

[10] Z angl. „intersection prime extension property“. (Pozn. překladatele.)

[11] Lze však snadno najít mnoho takových případů. Neboť z věty 4.1.7 vyplývá, že každá (i infinitární) slabě implikativní semilineární logika (mezi ně patří i $Ł_\infty$ a mnoho dalších dobře známých fuzzy logik) má IPEP.

Nyní ukážeme, že v klasické a intuicionistické logice splývá naše definice prvoteorie se známou definicí téhož pojmu prostřednictvím disjunkce. Dále ukážeme několik dalších možných definic, které lze v klasické, ale již ne v intuicionistické logice použít.

Připomeňme nejprve ale několik faktů: zaprvé větu o dedukci (jejíž standardní syntaktický důkaz uvidíme v kapitole 2) pro klasickou i intucionistickou logiku, která říká, že pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm_{\mathrm{CL}}$ platí: $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ právě tehdy, když $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Zadruhé vlastnost důkazu po případech (tato vlastnost je také velmi dobře známá a budeme se jí více věnovat v kapitole 3):

TVRZENÍ 1.3.13 (Vlastnost důkazu po případech pro CL a IL). *Nechť* $\mathrm{L} \in \{\mathrm{CL}, \mathrm{IL}\}$. *Pak pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Fm_{\mathrm{CL}}$ *platí:* $\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi \vee \psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \psi)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\chi \in \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi \vee \psi)$, tzn. $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Pak užitím axiomů $\alpha \to \alpha \vee \beta$ a $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$ dostaneme $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$, tedy $\chi \in \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \psi)$. Na druhou stranu předpokládejme, že $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Využitím věty o dedukci získáme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \chi$ a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi \to \chi$, dále užitím axiomů $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$ a pravidla *modus ponens* dokážeme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \vee \psi \to \chi$. Důkaz zakončíme opět aplikací věty o dedukci: $\chi \in \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi \vee \psi)$. □

TVRZENÍ 1.3.14 ($\cap$-ireducibilní teorie v CL a IL). *Pro každou teorii* $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{CL})$ *je následující ekvivalentní:*

1. *T je prvoteorie.*
2. *Pro každou dvojici formulí φ, ψ platí: pokud $\varphi \vee \psi \in T$, pak $\varphi \in T$ nebo $\psi \in T$.*
3. *T je $\cap$-ireducibilní.*
4. *T je maximální vzhledem k $\overline{0}$.*
5. *Pro každou formuli φ platí: $\varphi \in T$ nebo $\neg\varphi \in T$.*

Pokud $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{IL})$, *pak 1. je ekvivalentní s 2., 4. je ekvivalentní s 5. a navíc platí všechny implikace zezdola nahoru. Naopak implikace z 1. do 3. a z 3. do 4. obecně neplatí.*

Důkaz. Jako první ukážeme implikace, které platí již pro $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{IL})$.

- 1.↔2.: Předpokládejme 1. a $\varphi \vee \psi \in T$. Pak, díky vlastnosti důkazu po případech, $T = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \varphi \vee \psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \psi)$, a tedy $T = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \varphi)$ nebo $T = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \psi)$, tj. $\varphi \in T$ nebo $\psi \in T$. Naopak předpokládejme, že T není prvoteorie, tj. existují teorie $T_1, T_2 \in \mathrm{Th}(\mathrm{IL})$ takové, že $T = T_1 \cap T_2$, $T \subsetneq T_1$ a $T \subsetneq T_2$. Z toho vyplývá, že existují formule $\varphi \in T_1 \setminus T$ a $\psi \in T_2 \setminus T$. Užitím axiomů $\alpha \to \alpha \vee \beta$ a $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$ dostaneme $\varphi \vee \psi \in T_1 \cap T_2 = T$, zatímco $\varphi \notin T$ a $\psi \notin T$.
- 4.↔5.: Nechť platí 4. a existuje formule φ taková, že $\varphi \notin T$. Pak $T, \varphi \vdash \overline{0}$ a z věty o dedukci $T \vdash \varphi \to \overline{0}$, a protože T je teorie, dostaneme $\neg\varphi \in T$. Na druhou stranu předpokládejme 5. a $\varphi \notin T$. Tedy $\neg\varphi = \varphi \to \overline{0} \in T$ a užitím pravidla *modus ponens* $T, \varphi \vdash \overline{0}$.
- 5.→3.: Snadný důsledek tvrzení 1.3.7.
- 3.→1.: Triviální.

Abychom ukázali, že za silnějšího předpokladu $T \in \mathrm{Th}(\mathrm{CL})$ platí zbývající implikace, stačí ukázat, že 2. implikuje 5., což je snadný důsledek faktu, že $\varphi \vee \neg\varphi$ je teorémem klasické logiky CL. Zbývá tedy ukázat protipříklady na implikace, které neplatí pro IL:

- 2.$\not\to$3.: Uvažme Heytingovu algebru $[0,1]_{\mathrm{G}}$ zavedenou v příkladě 1.1.26 a všimněme si, že díky tvrzení 1.1.25 platí, že $\mathbf{G} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}}, \{1\}\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{IL})$. Vezměme ohodnocení e takové, že $e(v_i) = 1 - \frac{1}{i}$ pro každé $i \geq 1$. Užitím lemmatu 1.1.27 a tvrzení 1.1.30 a 1.1.25 víme, že $T_i = e^{-1}[\{[1 - \frac{1}{i}, 1]\}]$ je teorie pro každé $i \geq 1$; definujme dále $T_0 = e^{-1}[\{1\}]$. Zjevně pro každou dvojici φ a ψ máme: $\varphi \vee \psi \in T_0$ právě tehdy, když $e(\varphi) \vee e(\psi) = 1$ právě tehdy, když $e(\varphi) = 1$ nebo $e(\psi) = 1$. Tedy T_0 splňuje podmínku 2. Avšak snadno můžeme nahlédnout, že $T_0 = \bigcap_{i\geq 1} T_i$, zatímco pro každé $i \geq 1$, $v_i \in T_i \setminus T_0$, tj. T_0 není $\cap$-ireducibilní.
- 3.$\not\to$5.: Nechť T je maximální vzhledem k formuli $v \vee \neg v$ (víme, že tato formule není dokazatelná v intuicionistické logice, a tedy taková teorie musí existovat podle abstraktního Lindenbaumova lemmatu 1.3.8). Pak T je $\cap$-ireducibilní díky tvrzení 1.3.7, ale nemůže splňovat podmínku 5., neboť kdyby $v \in T$ nebo $\neg v \in T$, pak také $v \vee \neg v \in T$. $\square$

Všimněme si, že podmínky 2., 4. a 5. odpovídají obvyklým (ekvivalentním) definicím ultrafiltru na Booleových algebrách. Všimněme si, že teorie, které splňují podmínku 4., jsou právě maximálně bezesporné teorie IL (nebo CL) (tj. maximální prvky množiny $\{T \in \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\mathrm{IL}) \mid T \neq Fm_{\mathcal{L}}\}$ vzhledem k uspořádání danému inkluzí), což je snadným důsledkem faktu, že T je bezesporná právě tehdy, když $\overline{0} \notin T$ (díky axiomu $\overline{0} \to \varphi$ a pravidlu *modus ponens*).

Mohli bychom zadefinovat pojem *maximálně bezesporné uzavřené množiny* pro uzávěrový systém $\mathcal{C}$ na A a pozorovat, že každá bezesporná uzavřená množina C (tj. $C \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$) je maximálně bezesporná právě tehdy, když je maximální vzhledem ke každému prvku z $A \setminus C$. Pokud A má *$\mathcal{C}$-sporný prvek*, tj. prvek $\overline{0} \in A$ takový, že pro každou $C \in \mathcal{C}$ platí: $C = A$ právě tehdy, když $\overline{0} \in C$ (jak je tomu u Th(CL) a Th(IL)), pak lze charakterizovat maximálně bezesporné množiny jako množiny maximální vzhledem k $\overline{0}$. V takovém případě můžeme použít abstraktní Lindenbaumovo lemma a ukázat (pokud $\mathcal{C}$ je algebraický), že každá bezesporná uzavřená množina může být rozšířena na maximální bezespornou. To ale obecně neznamená, že maximálně bezesporné množiny tvoří bázi $\mathcal{C}$: uvažme množinu T_0 všech teorémů IL; víme, že $p \vee \neg p \notin T_0$. Díky předchozímu tvrzení víme, že maximálně bezesporné množiny dokazují $p \vee \neg p$, z toho vyplývá, že neexistuje maximálně bezesporná teorie $T \supseteq T_0$ taková, že $p \vee \neg p \notin T$.

Nyní se od syntaxe obrátíme opět k sémantice a zavedeme další nezbytné pojmy teorie matic. Všimněme si, že $\mathcal{L}$-matice $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ může být nahlížena jako prvořádová struktura v predikátovém jazyce bez rovnosti s funkčními symboly z $\mathcal{L}$, nosičem A a s jedním unárním predikátovým symbolem $\mathcal{F}$, kde funkční symboly jsou interpretovány operacemi na algebře $\boldsymbol{A}$ a predikátový symbol $\mathcal{F}$ množinou F. Z tohoto pohledu dává smysl pro logické matice zadefinovat obvyklé pojmy jako podstruktura (budeme ji nazývat *podmatice*), *homomorfismus* (pokud $a \in F_1$, pak $h(a) \in F_2$), *striktní homomorfismus* ($a \in F_1$ právě tehdy, když $h(a) \in F_2$), *izomorfismus*, *direktní součin*, *redukovaný součin* a *ultraprodukt*. Pro třídu matic $\mathbb{K}$ budeme značit uzávěr $\mathbb{K}$ na tyto operace, v uvedeném pořadí, následovně: $\mathbf{S}(\mathbb{K})$, $\mathbf{H}(\mathbb{K})$, $\mathbf{H}_{\mathrm{S}}(\mathbb{K})$, $\mathbf{I}(\mathbb{K})$, $\mathbf{P}(\mathbb{K})$, $\mathbf{P}_{\mathrm{R}}(\mathbb{K})$ a $\mathbf{P}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})$. Další důležitou operací na třídě matic, kterou budeme potřebovat, je redukovaný produkt přes spočetně úplné filtry[12] (tj. filtry uzavřené na spočetné průniky), tuto operaci budeme značit $\mathbf{P}_{\sigma\text{-}f}$. Zřejmě platí: $\mathbf{P}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{P}_{\sigma\text{-}f}(\mathbb{K})$. Poznamenejme ještě, že bijektivní maticový homomorfismus nemusí nutně být izomorfismus (protože zobrazení k němu inverzní nemusí být homomorfismem matic). Maticové *vnoření* je homomorfismus, který je prostý a striktní.

[12] Běžně se také používá termín σ-úplný filtr. (Pozn. překladatele.)

Poznamenejme, že pro libovolnou matici $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$ může být množina $[F, A] = \{G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \mid F \subseteq G\}$ uvažována jako interval ve svazu L-filtrů na $\boldsymbol{A}$.

TVRZENÍ 1.3.15. *Mějme* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle, \langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$ *a nechť* $h\colon \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \to \langle \boldsymbol{B}, G\rangle$ *je striktní surjektivní homomorfismus. Pak zobrazení* $\boldsymbol{h}$ *definované jako* $\boldsymbol{h}(H) = h[H]$ *je izomorfismus mezi* $[F, A]$ *a* $[G, B]$.

Důkaz. Nejprve si všimněme, že jelikož h je striktní homomorfismus, tak $h^{-1}[G] = F$.

Uvažme také zobrazení $\boldsymbol{h}^{-1}(S) = h^{-1}[S]$ pro každé $S \in [G, B]$. Očividně $\boldsymbol{h}^{-1}(S) \in [F, A]$ pro každé $S \in [G, B]$ (jedná se o filtr díky lemmatu 1.1.27 a $F = h^{-1}[G] \subseteq h^{-1}[S]$). Abychom dokázali, že $\boldsymbol{h}(T) \in [G, B]$ pro každé $T \in [F, A]$, musíme ukázat, že $h(x) \in h[T]$ implikuje $x \in T$ (zbytek je aplikace lemmatu 1.1.27): Z předpokladu dostaneme $h(x) = h(y)$ pro nějaké $y \in T$, proto $h(y \to^{\boldsymbol{A}} x) = h(y) \to^{\boldsymbol{B}} h(x) \in G$, tedy $y \to^{\boldsymbol{A}} x \in h^{-1}[G] = F \subseteq T$, a jelikož $y \in T$, dostaneme $x \in T$.

Snadno lze nahlédnout, že obě zobrazení $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{h}^{-1}$ jsou monotónní, a tedy k zakončení důkazu stačí ukázat, že $\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{h}(T)) = T$ a $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}^{-1}(S)) = S$ pro každé $T \in [F, A]$ a $S \in [G, B]$. Dvě netriviální inkluze jsou $\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{h}(T)) \subseteq T$ (jedná se o důsledek již dokázaného: $h(x) \in h[T]$ implikuje $x \in T$) a $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}^{-1}(S)) \supseteq S$ (důsledek surjektivity zobrazení h). □

Následující vlastnosti těchto operátorů na maticích a redukovaných maticích lze získat z výsledků prezentovaných v [18]. Všimněme si, že třetí tvrzení zobecňuje tvrzení 1.1.23.

TVRZENÍ 1.3.16. *Nechť* L *je slabě implikativní logika, pak platí následující:*

1. $\mathbf{SP}(\mathbf{MOD}(\mathrm{L})) \subseteq \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$.
2. $\mathbf{SP}_{\sigma\text{-}f}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})) \subseteq \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$.
3. *Pokud* $\mathbb{K} \subseteq \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$, $\mathbf{P}_{\mathrm{U}}\mathbf{I}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{I}(\mathbb{K})$ *a* $\mathrm{L} = \models_{\mathbb{K}}$, *pak* L *je finitární.*
4. $\mathbf{P}_{\mathrm{U}}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})) \subseteq \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ *právě tehdy, když* L *je finitární.*

Jako důsledek bodu 2. dostaneme, že pro každou slabě implikativní logiku L je $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ uzavřena na podalgebry a direktní součiny. Navíc pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ je množina k ní relativních kongruencí, $\boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$, úplný svaz vzhledem k uspořádání inkluzí (neboť pro každý systém $\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$ je faktor algebry $\boldsymbol{A}$ přes kongruenci $\bigcap \mathcal{X}$ vnořitelný do direktního součinu faktorů algebry $\boldsymbol{A}$ přes kongruence z $\mathcal{X}$, a jelikož $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{A})$ je uzavřena na podmatice a direktní součiny, je důkaz hotov).

Pojem subdirektního součinu algeber z univerzální algebry také zobecníme na logické matice. Říkáme, že $\mathbf{A}$ je *reprezentovatelná jako subdirektní součin* systému matic $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$, pokud existuje vnoření α z $\mathbf{A}$ do $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ takové, že pro každé $i \in I$ je složení α s i-tou projekcí, $\pi_i \circ \alpha$, surjektivní homomorfismus. V takovém případě nazýváme α *subdirektní reprezentací* a říkáme navíc, že je *konečná*, pokud je I konečná.

Uzávěr třídy matic $\mathbb{K}$ na subdirektní součin značíme $\mathbf{P}_{\mathrm{SD}}(\mathbb{K})$. Řekneme, že matice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ je *(konečně) subdirektně ireducibilní vzhledem ke* $\mathbb{K}$, pokud pro každou subdirektní reprezentaci α matice $\mathbf{A}$ vůči (neprázdnému konečnému) systému $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{K}$ existuje $i \in I$, pro které je $\pi_i \circ \alpha$ izomorfismus. Třídu všech (konečně) subdirektně ireducibilních matic vzhledem ke $\mathbb{K}$ značíme jako $\mathbb{K}_{\mathrm{R(F)SI}}$[13]. Snadným pozorováním je, že platí: $\mathbb{K}_{\mathrm{RSI}} \subseteq \mathbb{K}_{\mathrm{RFSI}}$. Pokud $\mathbb{K} = \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ pro nějakou logiku L, dospějeme k následující důležité charakterizaci:

[13] Z angl. „(finitely) subdirectly irreducible relative to $\mathbb{K}$“. (Pozn. překladatele.)

VĚTA 1.3.17 (Charakterizace RSI a RFSI redukovaných modelů). *Pro každou slabě implikativní logiku* L *a matici* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ *platí:*

1. $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ *právě tehdy, když* F *je* $\cap$*-ireducibilní v* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.

2. $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ *právě tehdy, když* F *je konečně* $\cap$*-ireducibilní v* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.

Důkaz. Prvně vyřešíme případ, kdy je $\mathbf{A}$ triviální redukovaná matice neboli $F = A = \{a\}$. Připomeňme, že v tomto případě je F konečně $\cap$-ireducibilní, ale není $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Očividně $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ a $\mathbf{A} \notin \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ (direktní součin prázdného systému matic je triviální matice).

Uvádíme důkaz pouze pro první tvrzení, neboť druhý je naprosto analogický. Předpokládejme, že $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ a (pro spor) že F není $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$, tj. $F = \bigcap_{i\in I} F_i$, kde $F \subsetneq F_i \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ pro všechna $i \in I$. Pomocí těchto filtrů definujeme matice $\mathbf{A}_i = \langle \boldsymbol{A}, F_i\rangle^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a ukážeme, že $\alpha\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ definovaná jako $\alpha(a) = \langle [a]_{F_i} \mid i \in I\rangle$ je subdirektní reprezentace matice $\mathbf{A}$. Homomorfismy $\pi_i \circ \alpha$ jsou zřejmě surjektivní a α, jak lze snadno nahlédnout, je striktní homomorfismus, takže zbývá ukázat, že je α injektivní. Uvažme, že $a \neq b$, pak protože matice $\mathbf{A}$ je redukovaná, můžeme (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že $a \to^{\boldsymbol{A}} b \notin F$, a proto také $a \to^{\boldsymbol{A}} b \notin F_i$ pro nějaké $i \in I$. Tedy $[a]_{F_i} \neq [b]_{F_i}$ a také $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Jelikož $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$, musí existovat $j \in I$ takové, že $\pi_j \circ \alpha$ je izomorfismus. Předpokládejme nyní, že $a \in F_j$, z toho plyne $\pi_j(\alpha(a)) = [a]_{F_j} \in [F_j]$, a jelikož $\pi_j \circ \alpha$ je izomorfismus, je také striktní homomorfismus matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_j$, tedy $a \in F$, a tak dostaneme $F_j = F$, což je spor.

Obrácenou implikaci dokážeme kontrapozicí: předpokládejme, že $\mathbf{A} \notin \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$, tj. existuje třída redukovaných modelů logiky $\{\mathbf{A}_i = \langle \boldsymbol{A}_i, F_i\rangle \mid i \in I\}$ a subdirektní reprezentace $\alpha\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, kde žádná projekce ve složení s α není izomorfismus. To nám umožní definovat systém filtrů, který bude rozkladem F. Vezměme $\bar{F}_i = (\pi_i \circ \alpha)^{-1}[F_i]$ a díky lemmatu 1.1.27 víme $\bar{F}_i \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Ze striktnosti α dále dostaneme $F = \bigcap_{i\in I} \bar{F}_i$. Kdyby $F = \bar{F}_j$ pro nějaké $j \in I$, byl by $\pi_j \circ \alpha$ izomorfismus, což je ve sporu s předpokladem. A tedy je dokázáno, že F není $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. □

PŘÍKLAD 1.3.18. Ukážeme, že jediná netriviální matice v $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RFSI}}$ a $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RSI}}$ je matice $\{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle\}$ ($\mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RFSI}}$ obsahuje samozřejmě také triviální matici $\{\langle \mathbf{2}, \{0,1\}\rangle\}$). Je zřejmé, že platí: $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RFSI}} \supseteq \mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RSI}} \supseteq \{\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle\}$. Dále uvažme netriviální Booleovu algebru $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle \neq \mathbf{2}$; tedy existuje prvek $a \in A \setminus \{0,1\}$. Uvažme hlavní filtry F a G generované prvky a a $\neg a$, tj. $F = \{x \geq a \mid x \in A\}$ a $G = \{x \geq \neg a \mid x \in A\}$. Tedy $\{1\} \neq F$ a $\{1\} \neq G$, a jelikož $\{1\} = \{x \geq a \vee \neg a \mid x \in A\} = F \cap G$, víme, že $\langle \boldsymbol{A}, \{1\}\rangle \notin \mathbf{MOD}^*(\mathrm{CL})_{\mathrm{RFSI}}$.

Pro intuicionistickou logiku ukážeme, že existuje netriviální matice v $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{IL})_{\mathrm{RFSI}}$, která není v $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{IL})_{\mathrm{RSI}}$. Uvažme Heytingovu algebru $[0,1]_{\mathrm{G}}$ zavedenou v příkladu 1.1.26. Víme, že $[0,1]_{\mathrm{G}} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{IL})$, její filtry jsou nahoru uzavřené množiny, a proto nemůže existovat dvojice filtrů $\{1\} \neq F$, $\{1\} \neq G$, $\{1\} = F \cap G$, tzn. $\mathbf{G} = \langle [0,1]_{\mathrm{G}}, \{1\}\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{IL})_{\mathrm{RFSI}}$. Na druhou stranu $\mathbf{G}$ není subdirektně ireducibilní: všimněme si, že $\mathcal{F}i_{\mathrm{IL}}([0,1]_{\mathrm{G}}) = \{(a,1], [a,1] \mid a \in [0,1)\} \cup \{\{1\}\}$ (díky tvrzení 1.1.25), $\{1\}$ tedy samozřejmě není $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{IL}}([0,1]_{\mathrm{G}})$ (neboť $\{1\} = \bigcap_{a<1} [a,1]$).

Pro další průběh si nejprve připomeňme značení z předcházející části týkající se redukce logických matic. Pro matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ píšeme $[a]_F = \{b \in A \mid \langle a, b\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)\}$, $[F] = \{[a]_F \mid a \in F\}$ a $\mathbf{A}^* = \langle \boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F), [F]\rangle$.

DŮSLEDEK 1.3.19. *Pro každou slabě implikativní logiku* L *a* $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$ *máme:*

1. $\mathbf{A}^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ *právě tehdy, když* F *je* $\cap$*-ireducibilní v* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.
2. $\mathbf{A}^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ *právě tehdy, když* F *je konečně* $\cap$*-ireducibilní v* $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.

Důkaz. Z lemmatu 1.2.13 víme, že $\mathbf{A}^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. Podle věty 1.3.17 vše, co potřebujeme ukázat, je, že F je (konečně) $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ právě tehdy, když $[F]$ je (konečně) $\cap$-ireducibilní v $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}^*)$.

Víme, že zobrazení $[\cdot]$ je striktní, surjektivní homomorfismus z $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}^*$, a tak, díky tvrzení 1.3.15, existuje izomorfismus mezi intervaly $\{G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \mid F \subseteq G\}$ a $\{G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}^*) \mid [F] \subseteq G\}$, zbytek tvrzení je snadným důsledkem právě řečeného. □

VĚTA 1.3.20 (Subdirektní reprezentace). *Nechť* L *je finitární slabě implikativní logika. Pak* $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}) = \mathbf{P}_{\mathrm{SD}}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}})$*, mj. tedy každou matici v* $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ *lze reprezentovat jako subdirektní součin matic z* $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$.

Důkaz. Jedna inkluze je poměrně snadná:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{SD}}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})) \subseteq \mathbf{SP}_{\sigma\text{-}f}(\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})) \subseteq \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}),$$

(poslední inkluze platí díky bodu 2 z tvrzení 1.3.16, ostatní inkluze platí triviálně). Abychom dokázali obrácenou inkluzi, uvažme $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. Podle důsledku 1.3.4 je $\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}$ algebraický uzávěrový operátor a podle důsledku 1.3.9 existuje systém $\{F_i \mid i \in I\}$ $\cap$-ireducibilních filtrů takových, že $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Vezměme $\mathbf{A}_i = \langle \boldsymbol{A}, F_i\rangle^*$. Zobrazení $\alpha\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ definované jako $\alpha(a) = \langle [a]_i \mid i \in I\rangle$ pro každé $a \in A$ je subdirektní reprezentace. Navíc, protože pro každé $i \in I$ je F_i $\cap$-ireducibilní, platí pro každé $i \in I$ také: $\langle \boldsymbol{A}, F_i\rangle^* \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ (podle věty 1.3.17). □

Tuto kapitolu zakončíme aplikací důsledku 1.3.19, získáme tak dvě varianty třetí věty o úplnosti (tentokrát ale omezené na finitární logiky nebo na logiky mající IPEP). Poznamenejme, že první z nich může být také dokázána aplikací vět 1.2.17 a 1.3.20.

VĚTA 1.3.21 (Úplnost vzhledem k RSI redukovaným modelům). *Nechť* L *je finitární slabě implikativní logika. Pak:* $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}}$.

Důkaz. Důkaz korektnosti je opět triviální. Abychom dokázali úplnost, předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Pomocí abstraktního Lindenbaumova lemmatu 1.3.8 a tvrzení 1.3.7 dostaneme, že existuje $\cap$-ireducibilní teorie $T \supseteq \Gamma$ taková, že $\varphi \notin T$. Z tvrzení 1.1.30 víme, že $\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$, a z Důsledku 1.3.19 dostaneme, že $\mathbf{LindT}_T \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$. Z první části lemmatu 1.2.13 víme, že ohodnocení e definované jako $e(\chi) = [\chi]_T$ splňuje $e(\chi) \in [T]$ právě tehdy, když $\chi \in T$. Tedy $e[\Gamma] \subseteq [T]$ a zároveň $e(\varphi) \notin [T]$, tím jsme ukázali $\Gamma \not\models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}} \varphi$. □

Důkaz druhé varianty třetí věty o úplnosti probíhá naprosto analogicky, pouze namísto abstraktního Lindenbaumova lemmatu (které máme dokázané pouze pro finitární logiky) použijeme vlastnost IPEP.

VĚTA 1.3.22 (Úplnost vzhledem k RFSI redukovaným modelům). *Nechť* L *je slabě implikativní logika splňující* IPEP. *Pak* $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}}$.

Z obou výše uvedených vět vyplývá, že finitární slabě implikativní logiky jsou úplné vzhledem ke třídě RFSI redukovaných modelů. Uvědomme si, že pro klasickou logiku jsme ukázali očekávanou úplnost vůči matici $\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle$ (viz příklad 1.3.18).

1.4 Algebraicky implikativní logiky

Sémantika, kterou jsme doposud uvažovali (jak v obecném, tak v případě slabě implikativních logik), byla založená na logických maticích, které mají dvě složky: algebru, která slouží k interpretaci spojek jako algebraických operací, a množinu vyznačených prvků (filtr), kterými jsme interpretovali pojem pravdy, který nám dál umožnil definovat logický důsledek. Cílem algebraické logiky je však snaha redukovat celou sémantiku, kdykoli je to možné, pouze na třídy algeber. Toho lze docílit tím, že popíšeme filtr čistě algebraickými pojmy, konkrétně pomocí rovnic. Cílem této sekce je nalézt třídu slabě implikativních logik, které umožňují tento rovnicový popis filtrů, a dále ukázat vztah mezi těmito logikami a vhodným pojmem rovnicového důsledku na jim odpovídajících třídách algeber.

DEFINICE 1.4.1 (Rovnicový důsledek). *Říkáme, že rovnice $\varphi \approx \psi$ je důsledek množiny rovnic Π vzhledem ke třídě $\mathcal{L}$-algeber $\mathbb{K}$, pokud pro každou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}$ a každé $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e máme $e(\varphi) = e(\psi)$, kdykoli $e(\alpha) = e(\beta)$ pro všechny $\alpha \approx \beta \in \Pi$. V takovém případě používáme značení $\Pi \models_{\mathbb{K}} \varphi \approx \psi$.*

Pro každou slabě implikativní logiku L, můžeme do jazyka logiky přeložit pojem algebraického důsledku daného třídou L-algeber následujícím způsobem:

TVRZENÍ 1.4.2. *Nechť L je slabě implikativní logika a $\Pi \cup \{\varphi \approx \psi\}$ množina rovnic. Pak $\Pi \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \varphi \approx \psi$ právě tehdy, když $\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \alpha \approx \beta \in \Pi\} \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$.*

Důkaz. Ukážeme důkaz pouze pro jednu implikaci, druhá je velmi podobná. Předpokládejme, že $\Pi \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \varphi \approx \psi$. Abychom ověřili, že $\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \alpha \approx \beta \in \Pi\} \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$, stačí (díky větě o 1.2.17) ověřit ekvivalentní sémantické tvrzení: $\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \alpha \approx \beta \in \Pi\} \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})} \varphi \leftrightarrow \psi$. Vezměme libovolný $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a libovolné $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e splňující předpoklady, tj. pro každé $\alpha \approx \beta \in \Pi$ máme $e(\alpha) \to^{\boldsymbol{A}} e(\beta), e(\beta) \to^{\boldsymbol{A}} e(\alpha) \in F$, a tedy (jelikož je matice redukovaná) $e(\alpha) = e(\beta)$. Podle předpokladu (využívajíce faktu, že $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$) víme, že $e(\varphi) = e(\psi)$, a tedy $e(\varphi) \to^{\boldsymbol{A}} e(\psi), e(\psi) \to^{\boldsymbol{A}} e(\varphi) \in F$. □

Chceme-li získat lepší propojení mezi rovnicovým vyplýváním a logikou, musíme se omezit na speciální podtřídu slabě implikativních logik.

DEFINICE 1.4.3 (Algebraicky implikativní logika). *Říkáme, že logika* L *je* algebraicky implikativní, *pokud je slabě implikativní a existuje množina rovnic $\mathcal{E}$ s jednou proměnnou taková, že pro každou $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a každé $a \in A$ platí: $a \in F$ právě tehdy, když $\mu^{\boldsymbol{A}}(a) = \nu^{\boldsymbol{A}}(a)$ pro všechny $\mu \approx \nu \in \mathcal{E}$. V takovém případě $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ nazýváme* ekvivalentní algebraickou sémantikou *logiky* L.

Symbolem $\mathcal{E}[\gamma]$ značíme množinu rovnic vzniklých dosazením formule γ za jedinou proměnnou v $\mathcal{E}$ a symbolem $\mathcal{E}[\Gamma]$ značíme množinu rovnic $\bigcup\{\mathcal{E}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

VĚTA 1.4.4 (Charakterizace algebraicky implikativních logik). *Pro každou slabě implikativní logiku* L *je následující ekvivalentní:*

1. L *je algebraicky implikativní.*
2. *Existuje množina rovnic $\mathcal{E}$ s jednou proměnnou taková, že*

   (Alg) $\quad p \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \{\mu(p) \leftrightarrow \nu(p) \mid \mu \approx \nu \in \mathcal{E}\}.$

3. *Existuje množina rovnic $\mathcal{E}$ s jednou proměnnou taková, že:*
    - *Pro každou $\mathcal{L}$-konsekuci $\Gamma \rhd \varphi$ platí $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{E}[\Gamma] \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \mathcal{E}(\varphi)$.*
    - *$p \approx q \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \mathcal{E}[p \leftrightarrow q]$ a $\mathcal{E}[p \leftrightarrow q] \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} p \approx q$.*
4. *Pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ je Leibnizův operátor $\Omega_{\boldsymbol{A}} : \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$ svazový izomorfismus.*
5. *Pro každý model $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ je F nejmenší* L-*filtr na $\boldsymbol{A}$.*

V prvních třech bodech lze uvažovat stejnou množinu $\mathcal{E}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že jsou ekvivalentní první tři body, poté ukážeme ekvivalenci posledních dvou a na závěr ukážeme implikace 1→4 a 4→2.
2→1: Plyne snadno z věty o úplnosti a definice algebraicky implikativních logik.
1→3: První část bodu 3 lze snadno ověřit pomocí věty o úplnosti a definice algebraicky implikativních logik. Abychom ukázali $p \approx q \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \mathcal{E}[p \leftrightarrow q]$, vezměme $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a ohodnocení e na $\boldsymbol{A}$ takové, že $e(p) = e(q)$. Pak $e(p) \to^{\boldsymbol{A}} e(q) \in F$ (díky (R)), a tak $\mu^{\boldsymbol{A}}(e(p) \to^{\boldsymbol{A}} e(q)) = \nu^{\boldsymbol{A}}(e(p) \to^{\boldsymbol{A}} e(q))$ pro každé $\mu \approx \nu \in \mathcal{E}$ a to samé pro opačnou implikaci. Pro důkaz $\mathcal{E}[p \leftrightarrow q] \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} p \approx q$ vezměme $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ a ohodnocení e na $\boldsymbol{A}$ splňující rovnice v předpokladu. Poté $e(p) \to^{\boldsymbol{A}} e(q), e(q) \to^{\boldsymbol{A}} e(p) \in F$, tj. $\langle e(p), e(q)\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, a protože matice je redukovaná: $e(p) = e(q)$.
3→2: Chceme ověřit: $p \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \{\mu(p) \leftrightarrow \nu(p) \mid \mu \approx \nu \in \mathcal{E}\}$. Z první podmínky v bodu 3 dostaneme ekvivalentní tvrzení v podobě (dvojitého) algebraického důsledku vzhledem k $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$, jehož platnost je zaručena druhou částí bodu 3.
4→5: Stačí si všimnout, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = \mathrm{Id}_{\boldsymbol{A}}$, a využít faktu, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ je izomorfismus.
5→4: Připomeňme, že pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ je $\boldsymbol{Con}_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})}(\boldsymbol{A})$ úplný svaz (zmíněno v komentářích pod tvrzením 1.3.16). Tvrzení 1.2.15 říká, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ je surjektivní a zachovává průseky i uspořádání. Abychom ukázali, že se jedná o svazový izomorfismus, stačí dokázat, že je prostý a reflektuje uspořádání. Jako první ukážeme, že se jedná o prosté zobrazení: předpokládejme $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$ pro nějaké $F, G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Podle předpokladu z bodu 5 je $F/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ nejmenší L-filtr na $\boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ a $G/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$ je nejmenší L-filtr na $\boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G) = \boldsymbol{A}/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, tedy: $F/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = G/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$. Vezměme libovolné $a \in F$. $[a]_F \in F/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = G/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$, a protože $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$, dostaneme $[a]_F = [a]_G$, a tedy platí $[a]_G \in G/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$, z čehož dostaneme $a \in G$. Druhá inkluze je stejná, takže můžeme shrnout: $F = G$. Nyní lze snadno dokázat, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ také reflektuje uspořádání: pokud $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) \subseteq \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$, pak $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F \cap G) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(F) \cap \Omega_{\boldsymbol{A}}(G) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, a protože je $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ prostá, máme $F \cap G = F$, a tedy $F \subseteq G$.
1→4: Jako první ukážeme, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ je prosté zobrazení. Předpokládejme $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) = \Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$ pro nějaké $F, G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Mějme $a \in A$, dostaneme následující řetězec ekvivalencí:

- $a \in F$,
- $[a]_F \in F/\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$,
- $\mu([a]_F) = \nu([a]_F)$ pro všechny $\mu \approx \nu \in \mathcal{E}$,
- $\mu([a]_G) = \nu([a]_G)$ pro všechny $\mu \approx \nu \in \mathcal{E}$,
- $[a]_G \in G/\Omega_{\boldsymbol{A}}(G)$,
- $a \in G$.

Velmi podobným způsobem se ukáže, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ reflektuje uspořádání. Díky tvrzení 1.2.15 víme, že $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ je surjektivní a zachovává uspořádání, a tedy je svazovým izomorfismem.

4→2: Nejprve ukážeme, že $T = \mathrm{Th_L}(\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T)\})$ pro každou $T \in \mathrm{Th(L)}$. Definujme $T' = \mathrm{Th_L}(\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T)\})$. Na jednu stranu, $T' \subseteq T$, a tedy z monotonie $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T') \subseteq \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T)$. Na druhou stranu, pokud $\langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T)$, pak také $\alpha \leftrightarrow \beta \in T'$, tedy $\langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T')$. Proto máme $\Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T') = \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(T)$, a jelikož $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ je prosté zobrazení, dostaneme $T = T'$. Mimo jiné jsme tedy ukázali, že

$$p \dashv\vdash \{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(\mathrm{Th_L}(p))\}.$$

Nechť je σ substituce mapující všechny proměnné na p, pak

$$p \dashv\vdash \{\sigma(\alpha) \leftrightarrow \sigma(\beta) \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(\mathrm{Th_L}(p))\}.$$

Množina $\mathcal{E}(p) = \{\sigma(\alpha) \approx \sigma(\beta) \mid \langle\alpha,\beta\rangle \in \Omega_{\boldsymbol{Fm}}(\mathrm{Th_L}(p))\}$ tak očividně splňuje podmínku (Alg). □

Povšimněme si, že díky důsledku 1.2.4 nezáleží definice algebraicky implikativní logiky na volbě implikace.

PŘÍKLAD 1.4.5. V mnoha případech stačí pouze jedna rovnice na splnění podmínky (Alg). Například klasická a intuicionistická logika jsou algebraicky implikativní: stačí uvážit rovnici $p \approx \overline{1}$ (snadno lze totiž dokázat $p \dashv\vdash_{\mathrm{IL}} p \leftrightarrow \overline{1}$) a obecněji všechna rozšíření logiky BCK jsou algebraicky implikativní užitím množiny $\{p \approx p \to p\}$ (protože platí: $p \dashv\vdash_{\mathrm{BCK}} p \leftrightarrow (p \to p)$).

Připomeňme příklad 1.1.19, kde jsme rozšířili logiku BCKW a BCKWP do intuicionistické, respektive klasické logiky přidáním axiomů popisujících chování přidaných spojek $\vee$, $\wedge$, $\overline{1}$, $\overline{0}$. Kdybychom udělali to samé s tím rozdílem, že bychom začali s logikou BCI, dostali bychom takzvanou *logiku omezených* BCI-*svazů* značenou jako BCI_{lat}. Ukážeme, že všechna rozšíření této logiky jsou algebraicky implikativní užitím množiny s pouze jednou rovnicí $\{(\chi \to \chi) \wedge \chi \approx \chi \to \chi\}$:

Směr zleva doprava: napřed pozorujme, že $\chi \vdash_{\mathrm{BCI}_{lat}} (\chi \to \chi) \wedge \chi \to (\chi \to \chi)$ (díky axiomu $\varphi \wedge \psi \to \varphi$). Platí také $\chi \vdash_{\mathrm{BCI}_{lat}} (\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi) \wedge \chi$, jak ukazuje následující důkaz:

(a)	$(\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi)$	(I)
(b)	$((\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi)) \to (\chi \to ((\chi \to \chi) \to \chi))$	(C)
(c)	$\chi \to ((\chi \to \chi) \to \chi)$	(a), (b), (MP)
(d)	$(\chi \to \chi) \to \chi$	(c), předpoklad a (MP)
(e)	$((\chi \to \chi) \to \chi) \wedge ((\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi))$	$\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$, (d), (a) a dvakrát (MP)
(f)	$(\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi) \wedge \chi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \wedge \chi)$, (e) a (MP)

Směr zprava doleva: zřejmě z $(\chi \to \chi) \leftrightarrow (\chi \to \chi) \wedge \chi$ dostaneme $(\chi \to \chi) \wedge \chi$ (díky axiomu (I) a pravidlu (MP)), $\chi \wedge (\chi \to \chi)$ (díky axiomu $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ a pravidlu (MP)), a tedy χ (díky axiomu $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ a pravidlu (MP)).

TVRZENÍ 1.4.6. *Když* L *je finitární algebraicky implikativní logika, pak* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ *je kvazivarieta a* $\mathcal{E}$ *lze vzít konečné.*

Důkaz. Možnost vzít konečné $\mathcal{E}$ je přímým důsledkem bodu 2 věty 1.4.4.

Abychom ukázali, že $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ je kvazivarieta (neboli třída algeber definovatelná kvazirovnicemi) stačí vzít libovolnou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ takovou, že všechny kvazirovnice platné v $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ platí v $\boldsymbol{A}$, a ukázat, že $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$. Ukážeme, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ pro $F = \{a \in A \mid \mu^{\boldsymbol{A}}(a) = \nu^{\boldsymbol{A}}(a)$ pro každé $\mu \approx \nu \in \mathcal{E}\}$. Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Z finitárnosti existuje konečná $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma_0 \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Předpokládejme, že pro nějaké ohodnocení e na $\boldsymbol{A}$: $e[\Gamma] \subseteq F$. Z první části bodu 3 minulé věty máme $\mathcal{E}[\Gamma_0] \models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \mathcal{E}(\varphi)$, což lze uvažovat jako kvazirovnici, která z předpokladu platí také v $\boldsymbol{A}$. Na druhou stranu máme $e[\Gamma_0] \subseteq F$, proto $e(\varphi) \in F$. Tudíž $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$, a jelikož z druhé části bodu 3 věty 1.4.4 plyne, že matice $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ je redukovaná, důkaz je hotov. □

Obdobnou konvenci jako v případě slabě implikativních logik, které vždy uvažujeme s pevně zvolenou principální implikací, zavádíme také pro algebraicky implikativní logiky, nyní se jedná o pevnou volbu množiny rovnic $\mathcal{E}$ poskytující algebraičnost (tato množina je ve skutečnosti jednoznačně určena až na množiny vzájemně odvoditelné v $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$). Všimněme si, že tyto rovnice mohou být identifikovány s dvojicemi formulí, někdy tedy mluvíme o takzvaných *algebraizujících párech* formulí. Skutečnost, že filtry v redukovaných maticích mohou být definovány pomocí rovnic, má několik zajímavých důsledků:

TVRZENÍ 1.4.7. *Nechť* L *je algebraicky implikativní,* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ *a* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. *Pak:*

1. $F \subseteq G$ *pro každé* $G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$.

2. *Pokud* $\langle \boldsymbol{A}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$, *pak* $F = G$, *tj. algebra* $\boldsymbol{A}$ *je algebraický redukt jednoznačně určené matice.*

3. *Zobrazení* $h\colon A \to B$ *je homomorfismus algeber z* $\boldsymbol{A}$ *do* $\boldsymbol{B}$ *právě tehdy, když se jedná o homomorfismus mezi odpovídajícími maticemi.*

4. *Zobrazení* $h\colon A \to B$ *je vnoření z* $\boldsymbol{A}$ *do* $\boldsymbol{B}$ *právě tehdy, když se jedná o prostý, striktní homomorfismus mezi odpovídajícími maticemi.*

5. $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{R(F)SI}}$ *právě tehdy, když* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{R(F)SI}}$.

Díky druhému bodu tohoto tvrzení víme, že pro každou algebraicky implikativní logiku L a pro každou $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ existuje jediný filtr $F_{\boldsymbol{A}}$ takový, že $\langle \boldsymbol{A}, F_{\boldsymbol{A}}\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. A tedy každá algebra $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ je vybavena jediným *sobě vlastním* uspořádáním $\leq_{\langle \boldsymbol{A}, F_{\boldsymbol{A}}\rangle}$.

Na závěr našeho putování světem abstraktní algebraické logiky zavedeme dvě význačné podtřídy algebraicky implikativních logik.

DEFINICE 1.4.8 (Rasiowa-implikativní a regulárně implikativní logiky). *Říkáme, že logika* L *je* Rasiowa-implikativní, *pokud je slabě implikativní a zároveň platí*

(W) $\quad \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \to \varphi.$

Dále říkáme, že L *je* regulárně implikativní *logika, pokud je slabě implikativní a zároveň platí*

(Reg) $\quad \varphi, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \to \varphi.$

Důkaz následujícího tvrzení je přímočarý.

TVRZENÍ 1.4.9. *Slabě implikativní logika* L *je regulární implikativní právě tehdy, když* F *je singleton pro každou matici* $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$.

TVRZENÍ 1.4.10. *Každá Rasiowa-implikativní logika je regulárně implikativní a každá regulárně implikativní logika je algebraicky implikativní. Navíc všechny čtyři třídy algebraicky implikativních logik, které jsme definovali (slabě, algebraicky, regulárně a Rasiowa-implikativní), jsou navzájem různé.*

Důkaz. První tvrzení očividně platí. Pro druhé stačí ukázat, že každá regulárně implikativní logika splňuje podmínku (Alg) (věta 1.4.4) pro množinu rovnic $\mathcal{E}(p) = \{p \approx p \to p\}$.

Abychom ukázali, že se jednotlivé třídy liší, začněme od té největší. Víme, že logika BCI je slabě implikativní, ale podle příkladu 1.2.12 existuje algebra $\boldsymbol{M}$ se dvěma různými filtry F, G takovými, že $\langle \boldsymbol{M}, F\rangle, \langle \boldsymbol{M}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{BCI})$. Tím jsme ukázali, že BCI není algebraicky implikativní (viz bod 5 věty 1.4.4).

Dále uvažme logiku BCI_{lat}, o které jsme již dříve v příkladu 1.4.5 ukázali, že je algebraicky implikativní. Uvažme algebru $\boldsymbol{N}$ s konečným nosičem $\{\top, t, \bot\}$ uspořádanou $\top > t > \bot$, kde svazové operace/konstanty jsou definované podle tohoto uspořádaní a implikace je dána následující tabulkou:

$\to^{\boldsymbol{N}}$	$\top$	t	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
t	$\top$	t	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Cvičení ověřit, že $\langle \boldsymbol{M}, \{\top, t\}\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{BCI}_{lat})$, přenecháme laskavému čtenáři (postup je obdobný jako v příkladu 1.2.12). Díky tvrzení 1.4.9 tak víme, že BCI_{lat} nemůže být regulárně implikativní.

Na závěr uvažme ekvivalenční fragment klasické logiky $\mathrm{CL}_{\equiv}$, o kterém lze snadno dokázat, že je regulárně implikativní. Ukážeme, že to ale není Rasiowa-implikativní logika. Vezměme matici $\mathbf{E} = \langle\langle\{0, 1\}, \equiv\rangle, \{1\}\rangle$, jejíž algebra je tvořena dvouprvkovým nosičem a klasickou operací ekvivalence: $0 \equiv 0 = 1 \equiv 1 = 1$ a $0 \equiv 1 = 1 \equiv 0 = 0$. Z úplnosti klasické logiky vůči $\langle \mathbf{2}, \{1\}\rangle$ lze snadno nahlédnou, že $\mathrm{CL}_{\equiv}$ je úplná vůči $\mathbf{E}$. Dále je zřejmé, že $\equiv$ nesplňuje podmínku kladenou na Rasiowa-implikativní logiky: $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \equiv \varphi$. $\mathrm{CL}_{\equiv}$ by ale pořád mohla být Rasiowa-implikativní vzhledem k jiné principální implikaci $\to$. Tato implikace by ale musela splňovat následující vlastnosti:

- $0 \to 0 = 1 \to 1 = 1$ (protože $\models_{\mathbf{E}} p \to p$).
- $1 \to 0 = 0$ (protože $p, p \to q \models_{\mathbf{E}} q$).
- $0 \to 1 = 1$ (protože $p \models_{\mathbf{E}} q \to p$).

Z toho vyplývá, že spojka $\to$ by se chovala jako klasická implikace, o které se ví, že je v čistě ekvivalenčním fragmentu klasické logiky nedefinovatelná, a $\mathrm{CL}_{\equiv}$ tedy vskutku není Rasiowa-implikativní logika. □

Kapitola 2

Substrukturální logiky

V této kapitole představíme širokou třídu slabě implikativních logik, kterým budeme říkat *substrukturální logiky*. V první sekci zavedeme implicitně kanonického reprezentanta této třídy, logiku, kterou značíme SL, jako nejslabší logiku splňující určité nároky na chování běžné množiny spojek. Poté obecně zavedeme substrukturální logiky jako rozšíření odpovídajících fragmentů logiky SL a budeme se zabývat jejich syntaktickými a sémantickými vlastnostmi a algebraizací těchto logik. Určíme, jaké je postavení těchto logik vzhledem k tomu, co se běžně v literatuře označuje za substrukturální logiky, konkrétně ukážeme, že SL se shoduje s logikou známou jako *omezená neasociativní plná Lambekova logika*[1]. Ve druhé části se budeme zabývat dvěma zásadními metalogickými vlastnostmi: větou o dedukci (na jejímž základě podáme obecný popis filtru generovaného množinou) a vlastností důkazu po případech (tato vlastnost bude hrát důležitou roli v následujících kapitolách). Budeme postupovat čistě syntakticky, na základě prezentace dané logiky zavedeme pojmy (MP)-založené a téměř (MP)-založené logiky a dokážeme obecnou formu obou výše zmíněných vlastností. Nakonec ve třetí sekci ukážeme, jak můžeme získat téměř (MP)-založenou prezentaci pro hlavní substrukturální logiky, což nám umožní aplikovat výsledky z předchozí části v následujících kapitolách.

2.1 Základní pojmy

Jazyk $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ se skládá ze spojek uvedených v tabulce 2.1, tj. z většiny spojek běžných pro substrukturální logiky (jejich názvy a role, které tyto spojky zastávají, budeme komentovat po následující definici). Pro psaní formulí v tomto jazyce (nebo v jeho fragmentech) budeme předpokládat následující prioritu spojek: implikace $\{\to, \rightsquigarrow\}$ mají nižší prioritu než ostatní binární spojky $\{\&, \wedge, \vee\}$ (píšeme tedy např. $\delta\&\chi \to (\chi\&\varphi)\vee\chi$ místo $(\delta\&\chi) \to ((\chi\&\varphi)\vee\chi)$). V této kapitole nebudeme pracovat s žádnými dodatečně definovanými spojkami jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$, ačkoli v literatuře lze najít definice dvou spojek pro negaci (definovaných jako $\varphi \to \overline{0}$ a $\varphi \rightsquigarrow \overline{0}$) a různé definice spojky ekvivalence (používající různé konjunkce a různé implikace). Tyto možné definice ekvivalence vedou v principu k různým spojkám, které jsou ovšem ekvidoka-

[1] Z angl. „bounded non-associative full Lambek logic“. (Pozn. překladatele.)

Symbol	Arita	Jméno	Alternativní jména
$\to$	2	principální implikace	pravé reziduum
$\&$	2	reziduovaná konjunkce	fúze, multiplikativní/silná konjunkce
$\rightsquigarrow$	2	duální implikace	levé reziduum
$\wedge$	2	svazová protokonjunkce	aditivní/slabá/svazová konjunkce
$\vee$	2	svazová protodisjunkce	aditivní/slabá/svazová disjunkce
$\overline{1}$	0	*verum*	(multiplikativní) jednotka
$\overline{0}$	0	*falsum*	(multiplikativní) nula
$\top$	0	top	úplná pravda
$\bot$	0	bottom	úplná nepravda

Tabulka 2.1: Jazyk logiky SL

Konsekuce	Symbol	Jméno
$\varphi \to (\psi \to \chi) \dashv\vdash \psi \,\&\, \varphi \to \chi$	(Res)	reziduace
$\varphi \to (\psi \to \chi) \dashv\vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$	($E_{\rightsquigarrow}$)	$\rightsquigarrow$-záměna
$\varphi \to \psi \dashv\vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$	(Symm)	symetrie
$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$	($\wedge$1)	dolní závora
$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$	($\wedge$2)	dolní závora
$\chi \to \varphi, \chi \to \psi \vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$	($\wedge$3)	infimalita
$\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$	($\vee$1)	horní závora
$\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$	($\vee$2)	horní závora
$\varphi \to \chi, \psi \to \chi \vdash \varphi \vee \psi \to \chi$	($\vee$3)	supremalita
$\varphi \vdash \overline{1} \to \varphi$	(Push)	push
$\overline{1} \to \varphi \vdash \varphi$	(Pop)	pop
$\vdash \varphi \to \top$	(Veq)	*verum ex quolibet*
$\vdash \bot \to \varphi$	(Efq)	*ex falso quodlibet*

Tabulka 2.2: Konsekuce logiky SL

zatelné (ve smyslu $\varphi \equiv \psi \dashv\vdash \varphi \equiv' \psi$) a také jsou ekvidokazatelné s dvojicí $\{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi\}$, kterou značíme jako $\varphi \leftrightarrow \psi$. Proto budeme i nadále pro tuto dvojici formulí používat pojem „ekvivalence“. Abychom zůstali věrni naší obecné konvenci, a sice že každá logika je vybavená principální implikací $\to$, budeme pro substrukturální logiky dále používat toto značení spolu s $\rightsquigarrow$ jako duální implikací (brzy ukážeme větu o dualitě, která říká, že z jistého hlediska nezáleží na tom, zvolíme-li za principální implikaci $\to$, nebo $\rightsquigarrow$). Ve chvíli, kdy budeme dokazovat, že SL je vlastně logika známa v literatuře jako omezená neasociativní plná Lambekova logika, zmíníme, jak naše značení odpovídá klasickému značení pro substrukturální logiky, kde se místo spojek $\to$ a $\rightsquigarrow$ používají spojky $\backslash$ a $/$, které graficky znázorňují, že se jedná o pravé, respektive levé reziduum spojky & (viz tvrzení 2.1.11).

DEFINICE 2.1.1 (Logika SL). SL *je nejslabší slabě implikativní logika v jazyce $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$, která splňuje konsekuce z tabulky 2.2.*

Rozeberme si nyní, jak pravidla z tabulky 2.2 specifikují chování jednotlivých spojek a jejich sémantickou interpretaci.

Všimněme si, že ačkoli přímo nespecifikujeme žádné další vlastnosti spojky $\to$, přesto (jak uvidíme v tvrzení 2.1.5) díky interakci s ostatními spojkami získává mnoho silných vlastností, které obvykle implikace v (ne)klasických logikách mají.

Pravidlo (Symm) zajišťuje (jak bylo zmíněno výše), že implikaci $\rightsquigarrow$ můžeme považovat za další principální implikaci logiky SL a že tyto dvě implikace jsou vzájemně odvoditelné. Pravidlo ($E_{\rightsquigarrow}$) nám navíc umožňuje zaměnit pořadí předpokladů v řetězci implikací, ale za cenu toho, že vnitřní výskyt principální implikace bude nahrazen její duální verzí $\rightsquigarrow$. Pravidlo ($E_{\rightsquigarrow}$) však nemůžeme nahradit pravidlem, které by zahrnovalo pouze implikaci $\to$, protože důsledkem takové formulace by byla ekvivalence spojek $\to$ a $\rightsquigarrow$ (což může být vyvráceno jednoduchým sémantickým protipříkladem).

Pravidlo (Res) nám umožňuje pomocí spojky & agregovat předpoklady řetězce implikací (nebo naopak řetězce implikací vytvářet).[2] Sémanticky je význam spojky & a její interakce se spojkami $\to$ a $\rightsquigarrow$ vcelku zřejmý. Uvažujeme-li totiž $\&^{\boldsymbol{A}}$ v libovolném redukovaném SL-modelu $\mathbf{A}$, pak $\to^{\boldsymbol{A}}$ musí být její *levé reziduum* a $\rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}}$ její *pravé reziduum* (viz část 8 tvrzení 2.1.11) a jak $\to^{\boldsymbol{A}}$, tak $\rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}}$ definují stejné maticové uspořádání $\leq^{\mathbf{A}}$.

Roli zbývajících binárních spojek lze snadno pochopit: pravidla pro $\wedge$ a $\vee$ zajišťují, že uspořádání dané principální implikací je (polo)svazové uspořádání a že se tyto spojky chovají jako jeho infimum a supremum. Povšimněme si však, že je v tabulce 2.1 nenazýváme prostě „konjunkcí“ a „disjunkcí“, ale přidáváme předponu „proto“. Důvodem je, že pravidla týkající se těchto spojek samy nezaručují „očekávané“ chování těchto spojek:

1. V případě $\wedge$ sice logika SL dokazuje pravidlo adjunkce $\varphi, \psi \vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \wedge \psi$ (viz tvrzení 2.1.5), ale toto pravidlo by nebylo dokazatelné v nejslabší slabě implikativní logice splňující pouze konsekuce pro $\wedge$.[3]

2. V případě $\vee$ lze ukázat, že v logice SL neplatí vlastnost důkazu po případech: kdykoli $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash \chi$, pak $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$.[4]

Význam konstant $\top$ a $\bot$ a jich definujících pravidel lze jednoduše popsat jako maximum a minimum v uspořádání daném implikací. Úlohou konstanty $\overline{1}$ je (jak přímočaře popisují pravidla (Push) a (Pop)) být nejmenší vyznačenou pravdivostní hodnotou. A nakonec úlohou konstanty $\overline{0}$, ačkoli její interpretace zůstala nespecifikována (všimněme si, že v tabulce 2.2 není žádná konsekuce zahrnující konstantu $\overline{0}$), je definovat dvě různé spojky negace jako $\varphi \to \overline{0}$ a $\varphi \rightsquigarrow \overline{0}$.

Samozřejmě že bychom mohli okamžitě navrhnout specifický axiomatický systém pro logiku SL (obsahující reflexivitu, tranzitivitu, *modus ponens* a pravidla kongruence pro všechny spojky z jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ a konsekuce z tabulky 2.2). A později (věta 2.1.14) skutečně uvedeme přirozenější axiomatický systém pro logiku SL. Ale i tento „naivní“ axiomatický systém umožňuje celkem snadno ukázat následující větu o dualitě:

[2] Pořadí argumentů ve formulaci pravidla (Res) je volitelné (pro každou spojku & bychom mohli vždy nadefinovat její transpozici $\&^t$ jako $\varphi \,\&^t\, \psi = \psi \,\&\, \varphi$); tuto formulaci jsme se rozhodli zvolit, abychom získali přímočařejší spojení se silnějším zněním pravidla (Res), které je ekvivalentní asociativitě (viz věta 2.1.7).

[3] Lze dokonce dokázat, že by nebylo dokazatelné ani v nejslabší slabě implikativní logice splňující všechny konsekuce z tabulky 2.2 kromě pravidel (Push) a (Pop).

[4] V sekci 2.2 ukážeme, jak získat tuto vlastnost pro některé extenze logiky SL, a v kapitole 3 se budeme dále zabývat obecnou charakterizací této vlastnosti.

DEFINICE 2.1.2 (Zrcadlový obraz). *Pro formuli χ jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ získáme její* zrcadlový obraz χ' *nahrazením všech výskytů spojky $\to$ v χ spojkou $\rightsquigarrow$ a naopak a nahrazením všech podformulí formule χ tvaru $\alpha \,\&\, \beta$ formulí $\beta \,\&\, \alpha$.*

Definici zrcadlového obrazu formule rozšíříme na množiny formulí obvyklým způsobem: $\Gamma' = \{\psi' \mid \psi \in \Gamma\}$ a dokážeme užitečnou větu, která usnadní následné formální důkazy:

VĚTA 2.1.3 (Dualita). *Pro každou formuli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ v jazyce $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ platí:*

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Gamma' \vdash_{\mathrm{SL}} \varphi'.$$

Důkaz. Ukážeme pouze jeden směr (ten druhý okamžitě vyplývá z faktu, že $(\varphi')' = \varphi$). Tvrzení ukážeme pro axiomy a pravidla axiomatického systému zavedeného v předchozím odstavci s proměnnými místo formulí, což je vše, co je třeba dokázat (díky strukturalitě a definici pojmu důkazu).

Tvrzení pro (Symm) platí triviálně. Z $p \leftrightarrow q \vdash_{\mathrm{SL}} p \,\&\, r \to q \,\&\, r$ a $p \leftrightarrow q \vdash_{\mathrm{SL}} r \,\&\, p \to r \,\&\, q$ dostaneme (užitím (Symm)) $p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow p \vdash_{\mathrm{SL}} p \,\&\, r \rightsquigarrow q \,\&\, r$ a $p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow p \vdash_{\mathrm{SL}} r \,\&\, p \rightsquigarrow r \,\&\, q$, čímž jsme získali zrcadlovou verzi kongruence pro &. Zrcadlová verze kongruence pro obě implikace se dokazuje obdobně.

Dále snadno nahlédneme že: $\varphi \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \psi \to (\varphi \to \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)$ a $\varphi \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \psi \to (\varphi \to \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \,\&\, \psi \to \chi \dashv\vdash_{\mathrm{SL}} \varphi \,\&\, \psi \rightsquigarrow \chi$, tím je tvrzení dokázáno také pro ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) a (Res).

Nechť $\Delta \rhd \psi$ je libovolné ze zbývajících pravidel. Prvně si všimněme, že se spojky & ani $\rightsquigarrow$ nevyskytují v žádné z formulí z $\Delta \cup \{\psi\}$ a že všechny tyto formule jsou buď proměnné, nebo obsahují spojku $\to$ právě jednou, a to jako hlavní spojku. Důkaz lze tedy zakončit pozorováním, že pravidlo (Symm) nám snadno dává požadovaný zrcadlový obraz. □

V následujícím tvrzení ukazujeme, že jsou všechny spojky jednoznačně určeny uvedenými pravidly.

TVRZENÍ 2.1.4. *Nechť* L *je slabě implikativní rozšíření logik* SL *se stejnou principální implikací $\to$ a nechť c je spojka jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}} \setminus \{\overline{0}\}$. Předpokládejme dále, že $\hat{c}$ je spojka (základní nebo odvozená) jazyka logiky* L *stejné arity jako c, která navíc splňuje všechna pravidla pro c z tabulky 2.2. Pak jsou tyto spojky ekvivalentní v logice* L, *tj.* $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi\, c\, \psi \leftrightarrow \varphi\, \hat{c}\, \psi$ *nebo* $\vdash_{\mathrm{L}} c \leftrightarrow \hat{c}$, *podle arity c.*

Důkaz. Jediný netriviální případ je pro spojku $\rightsquigarrow$. Z reflexivity ve tvaru $\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\varphi \rightsquigarrow \psi)$ pomocí ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) dostaneme $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$. Opět pomocí ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) tentokrát pro $\hat{\rightsquigarrow}$ dostaneme $\vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\varphi \mathbin{\hat{\rightsquigarrow}} \psi)$. Důkaz druhé implikace je stejný. □

TVRZENÍ 2.1.5. *Následující je v* SL *odvoditelné:*

($\mathrm{P_{SL}}1$)	$\vdash \varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$	
($\mathrm{P_{SL}}2$)	$\vdash \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	
($\mathrm{P_{SL}}3$)	$\vdash \varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$	
($\mathrm{P_{SL}}4$)	$\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	
($\mathrm{P_{SL}}5$)	$\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	*(Sufixace)*
($\mathrm{P_{SL}}6$)	$\psi \to \chi \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	*(Prefixace)*

(P_{SL}7) $\vdash \varphi \to (\psi \to \psi \mathbin{\&} \varphi)$
(P_{SL}8) $\varphi \to \psi \vdash \chi \mathbin{\&} \varphi \to \chi \mathbin{\&} \psi$
(P_{SL}9) $\varphi \to \psi \vdash \varphi \mathbin{\&} \chi \to \psi \mathbin{\&} \chi$
(P_{SL}10) $\varphi_1 \to \psi_1, \varphi_2 \to \psi_2 \vdash \varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2 \to \psi_1 \mathbin{\&} \psi_2$
(P_{SL}11) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
(P_{SL}12) $\vdash (\chi \to \varphi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi)$
(P_{SL}13) $\vdash (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$
(P_{SL}14) $\vdash \overline{1}$
(P_{SL}15) $\vdash \overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$
(P_{SL}16) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\overline{1} \to \varphi)$
(P_{SL}17) $\vdash \varphi \mathbin{\&} \overline{1} \leftrightarrow \varphi$
(P_{SL}18) $\vdash \overline{1} \mathbin{\&} \varphi \leftrightarrow \varphi$
(P_{SL}19) $\vdash \top \leftrightarrow (\bot \to \bot)$
(P_{SL}20) $\vdash \chi \mathbin{\&} (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\chi \mathbin{\&} \varphi) \vee (\chi \mathbin{\&} \psi)$
(P_{SL}21) $\vdash (\varphi \vee \psi) \mathbin{\&} \chi \leftrightarrow (\varphi \mathbin{\&} \chi) \vee (\psi \mathbin{\&} \chi)$
(P_{SL}22) $\vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \mathbin{\&} (\psi \wedge \overline{1}) \to \varphi \wedge \overline{1}$
(P_{SL}23) $\vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \mathbin{\&} (\psi \wedge \overline{1}) \to \psi \wedge \overline{1}$
(P_{SL}24) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \wedge \overline{1} \to \psi \wedge \overline{1})$.
(P_{SL}25) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \vee \chi \to \psi \vee \chi)$
(P_{SL}26) $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \vee \psi \to \psi)$
(P_{SL}27) $\vdash (\psi \to \varphi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \vee \psi \to \varphi)$
(P_{SL}28) $\vdash \varphi \wedge \overline{1} \to (\varphi \wedge \overline{1}) \wedge \overline{1}$

Pro $* \in \{\wedge, \vee\}$ SL *také dokazuje:*

(C_*) $\vdash \varphi * \psi \to \psi * \varphi$,
(I_*) $\vdash \varphi * \varphi \leftrightarrow \varphi$,
(A_*) $\vdash (\varphi * \psi) * \chi \leftrightarrow \varphi * (\psi * \chi)$.

Důkaz. Důkaz druhé části je zřejmý. Pro vybrané složitější případy z první části uvedeme náznaky důkazů:

(P_{SL}1) Z $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ pomocí ($E_{\rightsquigarrow}$).

(P_{SL}4) Z (P_{SL}1) užitím (MP) a (Symm).

(P_{SL}5) Z $\varphi \to \psi, \psi \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi) \vdash \varphi \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi)$ užitím ($E_{\rightsquigarrow}$).

(P_{SL}6) Z (P_{SL}2) získáme $\psi \to \chi \vdash \varphi \mathbin{\&} (\varphi \to \psi) \to \chi$ a zbytek plyne z (Res).

(P_{SL}8) Z $\psi \to (\chi \to \chi \mathbin{\&} \psi)$ získáme $\varphi \to \psi \vdash \varphi \to (\chi \to \chi \mathbin{\&} \psi)$ a zbytek plyne z (Res).

(P_{SL}9) Z předchozího, věty o dualitě a dvojího použití (Symm).

(P_{SL}11) $\varphi \vdash \overline{1} \to \varphi$ a $\psi \vdash \overline{1} \to \psi$, a tedy $\varphi, \psi \vdash \overline{1} \to \varphi \wedge \psi$. Zbytek je zřejmý.

(P_{SL}12) Z ($\wedge$1) užitím pravidla (Res) dostaneme $\chi \mathbin{\&} ((\chi \to \varphi) \wedge (\chi \to \psi)) \to \varphi$, obdobně také dostaneme $\chi \mathbin{\&} ((\chi \to \varphi) \wedge (\chi \to \psi) \to \psi)$, důkaz zakončíme užitím ($\wedge$3) a (Res).

($P_{SL}13$) Z ($\wedge 1$) užitím ($E_{\rightsquigarrow}$) dostaneme $\varphi \to ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi)$, obdobně také dostaneme $\psi \to ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi)$. Důkaz končí aplikací ($\vee 3$) a ($E_{\rightsquigarrow}$).

($P_{SL}16$) Z $\overline{1} \to (\varphi \rightsquigarrow \varphi)$ využitím ($E_{\rightsquigarrow}$) dostaneme $\varphi \to (\overline{1} \to \varphi)$. Druhá implikace plyne z ($P_{SL}4$) a ($P_{SL}14$).

($P_{SL}20$) Z ($\vee 1$) (respektive z ($\vee 2$)) a ($P_{SL}8$) přímočaře dostaneme: $\chi \,\&\, \varphi \to \chi \,\&\, (\varphi \vee \psi)$ a $\chi \,\&\, \psi \to \chi \,\&\, (\varphi \vee \psi)$, a tedy užitím ($\vee 3$) ukončíme důkaz jednoho směru. Opačný směr: z (Res) a z ($\vee 1$) (respektive z ($\vee 2$)) dostaneme $\varphi \to (\chi \to \chi \,\&\, \varphi \vee \chi \,\&\, \psi)$ a $\psi \to (\chi \to \chi \,\&\, \varphi \vee \chi \,\&\, \psi)$. Důkaz zakončíme užitím ($\vee 3$) a (Res).

($P_{SL}21$) Podobné (nebo použitím věty o dualitě a pravidla (Symm)).

($P_{SL}22$) Použijeme ($P_{SL}8$) na $\psi \wedge \overline{1} \to \overline{1}$, tím získáme $(\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, (\psi \wedge \overline{1}) \to (\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, \overline{1}$ a zakončíme užitím ($P_{SL}17$). □

Nyní se zaměříme na některé důležité extenze logiky SL.

DEFINICE 2.1.6. *Uvažme následující konsekuce:*

a_1	$\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi) \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi$	*reasociace doleva*
a_2	$(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$	*reasociace doprava*
e	$\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$	*záměna*
c	$\varphi \to (\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$	*kontrakce*
i	$\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	*levé oslabení*
o	$\overline{0} \to \varphi$	*pravé oslabení*

Pro každou $X \subseteq \{a_1, a_2, e, c, i, o\}$ *a každou slabě implikativní logiku* L *v dostatečně expresivním jazyce (tj. jazyce obsahujícím všechny spojky vyskytující se v příslušných axiomech) budeme jako* L_X *značit extenzi logiky* L *o X. Pokud je v X jak* a_1*, tak i* a_2*, pak místo nich píšeme pouze* a*. Obdobně (z důvodů konsistence se značením běžným v literatuře) když v X je* i *a zároveň* o*, pak místo nich píšeme pouze* w.

Všimněme si, že axiom i jsme v příkladu 1.1.12 nazývali (K), zatímco pravidla e a c jsou slabšími (pravidlovými) verzemi axiomů (C) a (W) (z příkladu 1.2.12). V následující větě ukážeme, jak lze axiomy kontrakce, záměny a oslabení vyjádřit využitím spojky &. Navíc tato věta ukazuje, za jakých podmínek je konjunkce & asociativní. Ukazuje se, že obě část asociativity jsou ekvivalentní zajímavým logickým zákonům, které jsou obvykle důsledky zesílení pravidel logiky SL na jejich axiomatický tvar.

VĚTA 2.1.7. *Nechť* L *je jedna z následujících axiomatických extenzí logiky* SL*:* SL_{a_1}, SL_{a_2}, SL_e, SL_c *nebo* SL_i. *Pak* L *je extenze* SL *o libovolnou z konsekucí uvedených níže v příslušné sekci (tzn.* L *lze axiomatizovat přidáním této konsekuce k libovolné prezentaci logiky* SL*):*

SL_{a_1}
1. $\vdash (\varphi \,\&\, \psi \to \chi) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
2. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$
3. $\vdash (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$

SL_{a_2}
1. $\vdash (\psi \to (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \,\&\, \psi \to \chi)$
2. $\vdash (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi))$

$\mathrm{SL_e}$ *1.* $\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \psi \,\&\, \varphi$
2. $\vdash (\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$
3. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \rightsquigarrow \psi)$

$\mathrm{SL_c}$ *1.* $\vdash \varphi \to \varphi \,\&\, \varphi$
2. $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi \,\&\, \psi$

$\mathrm{SL_i}$ *1.* $\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \psi$
2. $\psi \vdash \varphi \to \psi$
3. $\vdash \varphi \to \overline{1}$
4. $\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \varphi$
5. $\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \varphi \wedge \psi$

Důkaz. Toto tvrzení dokážeme pomocí řady implikací tvaru „extenze logiky SL o pravidlo x dokazuje pravidlo y“ ($[x\vdash y]$ pomocí symbolů), kde x a y jsou buď názvy pravidel, nebo čísla označující uvažované formule.

$\mathrm{SL_{a_1}}$ [1⊢2] Z ($\mathrm{P_{SL}}$2) ve tvaru $\chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \varphi$ užitím ($\mathrm{P_{SL}}$5) dostaneme $(\varphi \to \psi) \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \psi)$. Dále užitím 1 (ve tvaru $(\chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)))$ a tranzitivity důkaz dokončíme.

[2⊢3] Z ($\mathrm{P_{SL}}$3)ve tvaru $\psi \to ((\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$ užitím 2 a tranzitivity dostaneme $\psi \to ((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi))$. Důkaz dokončíme aplikací pravidla ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) .

[3⊢1] Z reflexivity ve tvaru $(\varphi \,\&\, \psi \to \chi) \to (\varphi \,\&\, \psi \to \chi)$ užitím ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) a (Res) dostaneme $\psi \to (\varphi \to ((\varphi \,\&\, \psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi))$. Dále užitím 3 a tranzitivity dostaneme $\psi \to ((\varphi \,\&\, \psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$. ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) důkaz dokončí.

[1⊢$\mathrm{a_1}$] Z reflexivity ve tvaru $(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi$ užitím (Res) dostaneme $\chi \to (\varphi \,\&\, \psi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi)$. Dále užitím 1 a tranzitivity dostáváme $\chi \to (\psi \to (\varphi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi))$. Na závěr použijeme dvakrát (Res).

[$\mathrm{a_1}$⊢2] Z ($\mathrm{P_{SL}}$2) ve tvaru $\chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \varphi$ užitím ($\mathrm{P_{SL}}$5) dostaneme $(\varphi \to \psi) \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \psi)$. Pravidlo (Res) nám dává $(\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$, a tak užitím $\mathrm{a_1}$ dostaneme $\chi \,\&\, ((\chi \to \varphi) \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to \psi$, závěr získáme aplikací pravidla (Res) .

$\mathrm{SL_{a_2}}$ [1⊢$\mathrm{a_2}$] Z reflexivity ve tvaru $\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi) \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$ dvojnásobným užitím pravidla (Res) dostaneme $\chi \to (\psi \to (\varphi \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)))$. Dále užitím 1 a tranzitivity dostaneme $\chi \to (\varphi \,\&\, \psi \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi))$. Zbytek plyne užitím pravidla (Res).

[2⊢1] Z reflexivity ve tvaru $(\psi \to (\varphi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$ užitím ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) dostaneme $\psi \to ((\psi \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$. Dále užitím 2 a tranzitivity dostaneme $\psi \to (\varphi \to ((\psi \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow \chi))$. Zbytek plyne užitím (Res) a ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$).

[$\mathrm{a_2}$⊢2] Z reflexivity ve tvaru $(\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$ užitím ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) dostaneme $\psi \to ((\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$. Dále dvojím užitím (Res) dostaneme $\varphi \,\&\, ((\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \,\&\, \psi) \to \chi$. A tedy také $(\varphi \,\&\, (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))) \,\&\, \psi \to \chi$ (plyne z $\mathrm{a_2}$). Užitím (Res) a ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) získáme $\varphi \,\&\, (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow \chi)$. Na závěr aplikujeme pravidlo (Res).

$\mathrm{SL_e}$ [1⊢e] dostaneme okamžitě užitím (Res); [e⊢2] plyne z tvrzení 2.1.4; důkaz [2⊢3] začneme s ($\mathrm{P_{SL}}$1): $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$, zbytek je užití 2 a ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$). Důkaz [3⊢1] začneme s ($\mathrm{P_{SL}}$7), díky 3 dostaneme $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \psi \,\&\, \varphi)$, důkaz končí užitím ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$) a (Res).

$\mathrm{SL_c}$ Důkaz [1⊢c] je snadnou aplikací pravidla (Res); pro důkaz [c⊢2] pozorujme, že z (∧1), (∧2) a ($\mathrm{P_{SL}}$10) dostaneme: $(\varphi \wedge \psi) \,\&\, (\varphi \wedge \psi) \to \varphi \,\&\, \psi$, důkaz končí aplikací (Res) a c. Poslední tvrzení [2⊢1] je snadno dokazatelné pomocí ($\mathrm{I}_\wedge$).

$\mathrm{SL_i}$ Důkazy [1⊢i], [i⊢2], [2⊢3], [3⊢1], [3⊢4] a [4⊢3] jsou zřejmé. Důkaz uzavřeme pozorováním, že z axiomu i dostaneme 1 a 4, a tudíž i 5 užitím (∧3). Poslední implikace [5⊢i] je triviální. □

Užitím tvrzení 2.1.4 a předchozí věty můžeme pro některé extenze logiky SL ukázat, že některé spojky jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ v těchto logikách splývají, tím lze tedy zjednodušit jejich jazyk:

DŮSLEDEK 2.1.8.

- $\vdash_{\mathrm{SL_o}} \bot \leftrightarrow \overline{0}$
- $\vdash_{\mathrm{SL_i}} \top \leftrightarrow \overline{1}$ *a* $\vdash_{\mathrm{SL_i}} \overline{1} \leftrightarrow (\varphi \to \varphi)$
- $\vdash_{\mathrm{SL_e}} (\varphi \rightsquigarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$*, a tedy* $\mathrm{SL_{ae}}$ *lze axiomatizovat (vzhledem k* SL*) užitím* $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$.
- $\vdash_{\mathrm{SL_{ci}}} \varphi\&\psi \leftrightarrow \varphi\wedge\psi$*, a tedy* $\mathrm{SL_{ci}} = \mathrm{SL_{cie}}$. *Navíc* $\mathrm{SL_{ac}}$ *dokazuje* $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$ *(tento axiom však sám o sobě nestačí k axiomatizování* $\mathrm{SL_{ac}}$ *vzhledem k* SL*).*

Nyní můžeme snadno dokázat větu o dualitě pro tyto významné extenze logiky SL (srovnejte s větou 2.1.3). Připomeňme, že χ' značí zrcadlový obraz formule χ.

VĚTA 2.1.9 (Dualita pro SL_X). *Nechť* $X \subseteq \{a, e, c, i, o\}$. *Pak pro každou množinu formulí* $T \cup \{\varphi\}$ *platí:*

$$T \vdash_{\mathrm{SL}_X} \varphi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad T' \vdash_{\mathrm{SL}_X} \varphi'.$$

Nyní použijeme logiku SL jako základ pro zavedení obecné definice třídy substrukturálních logik. Naším cílem není pokrýt všechny logiky, které by mohly být v literatuře zahrnuty mezi substrukturální logiky, ale pouze v rámci slabě implikativních logik *matematicky* vydělit co nejširší třídu logik sdílejících „esenciální“ vlastnosti substrukturálních logik, pro které pak budeme moci formulovat a dokazovat obecná matematická tvrzení. Mohli bychom dosáhnout většího stupně obecnosti užitím komplexnější, ale méně přirozené definice. Avšak pro účely tohoto textu považujeme námi zvolenou konvenci za dostatečně obecnou.

KONVENCE 2.1.10 ((Asociativní) substrukturální logika). *Slabě implikativní logika v jazyce* $\mathcal{L}$ *je* substrukturální*, pokud je rozšířením* $(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{SL}})$*-fragmentu logiky* SL. *Substrukturální logiku nazýváme* asociativní*, pokud rozšiřuje* $(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{SL}})$*-fragment logiky* $\mathrm{SL_a}$.

Poznamenejme, že tato konvence mimo jiné pokrývá logiky BCI a BCK, se kterými jsme se seznámili v minulé kapitole. Dále pokrývá všechny jejich extenze a většinu jejich rozšíření (například $Ł_\infty$, IL a CL).[5] Ve skutečnosti lze dokázat, že IL je logika, kterou získáme, přidáme-li k SL všechny axiomy z definice 2.1.6, tzn. IL je $\mathrm{SL}_{\mathrm{aecw}}$ (v předchozím důsledku jsme popsali, jak spojky v přítomnosti těchto axiomů splývají); dále můžeme získat $\mathrm{SL}_{\mathrm{ae}}$ a $\mathrm{SL}_{\mathrm{aew}}$ jako rozšíření logik BCI resp. BCK. Později (ve větě 2.1.14) identifikujeme SL jako omezenou neasociativní variantu takzvané *plné Lambekovy logiky* [27]. Tím se stane zřejmým fakt, že naše konvence zahrnuje většinu logik, kterým se v literatuře běžně říká substrukturální.[6]

Poznamenejme ještě, že naše volba formalismu dělá naši definici substrukturálních logik normativní v tom smyslu, že jakékoli užití tradiční spojky dané logiky musí splňovat všechna pravidla odvoditelná v logice SL. To může mít neočekávané následky. Například: logika BCK-polosvazů v jazyce $\{\to, \wedge\}$ značená jako $\mathrm{BCK}_\wedge$ [33] (definovaná obdobně jako logika omezených BCI-svazů zavedená v příkladě 1.4.5) není ve smyslu naší konvence substrukturální logika (nesplňuje totiž tvrzení ($\mathrm{P_{SL}}12$) z tvrzení 2.1.5); avšak kdybychom tuto logiku formulovali v jazyce $\{\to, \overline{\wedge}\}$, pak by se podle naší konvence vskutku jednalo o substrukturální logiku (protože jediná $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ spojka přítomná v jejím jazyce, jmenovitě $\to$, se chová podle definice).

Syntaktické vlastnosti logiky SL a jejích význačných rozšíření, které jsme dříve dokázali v tvrzení 2.1.5 a ve větě 2.1.7, očividně platí v každé substrukturální logice L, jejíž jazyk je dostatečně expresivní. Všimněme si, že substrukturální logika L je Rasiowa-implikativní právě tehdy, když dokazuje axiom i (tedy jsou všechny tyto logiky algebraicky implikativní). V Rasiowa-implikativních substrukturálních logikách navíc platí: $\overline{1} \leftrightarrow (\varphi \to \varphi)$, proto můžeme spojku $\overline{1}$ uvažovat jako definovanou.

Nyní uvedeme seznam několika základních sémantických vlastností spojek v substrukturálních logikách:

TVRZENÍ 2.1.11. *Nechť* L *je substrukturální logika v dostatečně expresivním jazyce a* $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. *Pak:*

1. $\overline{1}^{\boldsymbol{A}} = \min_{\leq_{\mathbf{A}}} F$.
2. $\top^{\boldsymbol{A}} = \max_{\leq_{\mathbf{A}}} A$ *a* $\top^{\boldsymbol{A}} \in F$.
3. $\bot^{\boldsymbol{A}} = \min_{\leq_{\mathbf{A}}} A$ *a* $\bot^{\boldsymbol{A}} \notin F$, *pokud* $\mathbf{A}$ *není triviální.*
4. $\leq_{\mathbf{A}}$ *je* $\vee$*-polosvazové uspořádání.*
5. $\leq_{\mathbf{A}}$ *je* $\wedge$*-polosvazové uspořádání.*
6. $\to^{\boldsymbol{A}}$ *a* $\rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}}$ *jsou antitónní v prvním argumentu a monotónní v druhém vzhledem k* $\leq_{\mathbf{A}}$.
7. $\&^{\boldsymbol{A}}$ *je monotónní v obou argumentech vzhledem k* $\leq_{\mathbf{A}}$ *a* $\overline{1}^{\boldsymbol{A}}$ *je její jednotkový prvek.*
8. *Pro každé* $x, y, z \in A$, $x \&^{\boldsymbol{A}} y \leq_{\mathbf{A}} z$ *právě tehdy, když* $y \leq_{\mathbf{A}} x \to^{\boldsymbol{A}} z$ *právě tehdy, když* $x \leq_{\mathbf{A}} y \rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}} z$.
9. *Pro každé* $x, y, z \in A$, $x \to^{\boldsymbol{A}} y = \max\{z \mid x \&^{\boldsymbol{A}} z \leq_{\mathbf{A}} y\}$.
10. *Pro každé* $x, y, z \in A$, $x \rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}} y = \max\{z \mid z \&^{\boldsymbol{A}} x \leq_{\mathbf{A}} y\}$.
11. *Pro každé* $x, y, z \in A$, $x \&^{\boldsymbol{A}} y = \min\{z \mid y \leq_{\mathbf{A}} x \to^{\boldsymbol{A}} z\} = \min\{z \mid x \leq_{\mathbf{A}} y \rightsquigarrow^{\boldsymbol{A}} z\}$.

---

[5] $Ł_\infty$ jsme zavedli v příkladě 1.3.11 v jazyce obsahujícím pouze $\to$ a $\overline{0}$, ale další spojky z jazyka $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ můžeme zadefinovat takto: $\neg\varphi = \varphi \to \overline{0}$, $\varphi \& \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi = (\varphi \to \psi) \to \psi$ a $\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

[6] Konkrétně zahrnuje všechny *substrukturální logiky* ve smyslu knihy [27], což jsou axiomatické extenze SL_{a}, a *substrukturální logiky reziduovaných struktur* ve smyslu závěrečných poznámek v článku [41], což jsou fragmenty axiomatických extenzí SL_{a}.

Důkaz. Ověřit všechna tato tvrzení je velmi snadné, poznamenejme akorát, že tvrzení 8. plyne z (Res) a ($E_{\rightsquigarrow}$) a zbylá tři tvrzení jsou jeho důsledkem. □

VĚTA 2.1.12. *Každá substrukturální logika s $\vee$ nebo $\wedge$ v jazyce je algebraicky implikativní.*

Důkaz. Důkaz by byl jednodušší, kdybychom předpokládali, že konstanta $\overline{1}$ je v jazyce naší logiky. Stačilo by pak jednoduše uvažovat algebraizující dvojici $\langle \chi \wedge \overline{1}, \overline{1} \rangle$ (nebo $\langle \chi \vee \overline{1}, \chi \rangle$), která, jak lze snadno ukázat, splňuje podmínku (Alg) (lze argumentovat např. předchozím tvrzením). Nyní uvedeme důkaz pro obecnější případ, když neuvažujeme v jazyce konstantu $\overline{1}$.

Předpokládejme, že naše logika má v jazyce spojku $\wedge$; ukážeme, že $\langle (\chi \to \chi) \wedge \chi, \chi \to \chi \rangle$ je algebraizující dvojice (v druhém případě bychom toto tvrzení obdobně ukázali pro dvojici $\langle (\chi \to \chi) \vee \chi, \chi \rangle$). Důkaz probíhá obdobně jako v příkladě 1.4.5 pro logiku omezených BCI-svazů. Jeden směr je zřejmý: triviálně platí $\chi \vdash (\chi \to \chi) \wedge \chi \to (\chi \to \chi)$ a $\chi \vdash (\chi \to \chi) \to (\chi \to \chi) \wedge \chi$ (protože $\chi \vdash (\chi \to \chi) \to \chi$). Druhý směr: očividně máme $(\chi \to \chi) \leftrightarrow (\chi \to \chi) \wedge \chi \vdash (\chi \to \chi) \wedge \chi$, a tedy také $(\chi \to \chi) \leftrightarrow (\chi \to \chi) \wedge \chi \vdash \chi$ (protože zřejmě platí: $(\chi \to \chi) \wedge \chi \vdash \chi$). □

Naším dalším cílem je identifikovat naši základní logiku SL a její extenze SL_X mezi dobře známými substrukturálními logikami. Jelikož mnoho substrukturálních logik je v literatuře uváděno ve své neomezené podobě (tzn. bez pravdivostních konstant $\perp$ and $\top$), zavádíme následující konvenci:

KONVENCE 2.1.13. *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Názvem* omezená L *a symbolem* $L_\perp$ *značíme rozšíření logiky* L *o konstantu $\perp$ a dodatečný axiom $\perp \to \varphi$. Poznamenejme, že v každé omezené substrukturální logice lze definovat konstantu $\top = \perp \to \perp$, která splňuje $\varphi \to \top$ (díky instanci axiomu* (Efq) *v podobě $\perp \to (\varphi \rightsquigarrow \perp)$ a pravidlu ($E_{\rightsquigarrow}$)).*

Základní substrukturální logika je v literatuře známá jako *plná Lambekova logika* [27] a značená jako FL. Tato logika je formulovaná v jazyce $\mathcal{L}_{FL}$, který je obdobný našemu jazyku $\mathcal{L}_{SL}$ a obsahuje pravdivostní konstanty $\overline{0}$ a $\overline{1}$, dvě implikační spojky \ a / (tyto spojky v komutativní extenzi FL, kterou značíme FL_e, splývají, značíme je pak $\to$), reziduovanou konjunkci &[7] a svazové spojky $\wedge, \vee$. Axiomatický systém pro FL (převzato z [27, Figure 2.10]) uvádíme v tabulce 2.3 spolu s anglickými jmény jednotlivých axiomů a pravidel.

Dalším důležitým příkladem substrukturální logiky je neasociativní varianta logiky FL, která je také běžně formulována v jazyce $\mathcal{L}_{FL}$ a jejíž axiomatický systém uvádíme v tabulce 2.4 (převzato z [29, Figure 5]). Název a značení pro tuto logiku ještě nejsou plně ustáleny, proto je zde explicitně neuvádíme.

Předtím, než ukážeme, v jakém vztahu jsou tyto dvě logiky s logikou SL, uvádíme překlad mezi jazyky $\mathcal{L}_{FL}$ a $\mathcal{L}_{SL}$. Ve skutečnosti uvádíme dva možné překlady (z věty o dualitě plyne, že pro následující tvrzení není podstatné, jaký překlad zvolíme).[8]

$\mathcal{L}_{FL}$ značení	přímý překlad	nepřímý překlad
$\varphi\psi$	$\varphi \,\&\, \psi$	$\psi \,\&\, \varphi$
$\varphi \setminus \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \rightsquigarrow \psi$
$\psi \,/\, \varphi$	$\varphi \rightsquigarrow \psi$	$\varphi \to \varphi$

[7] V pracích zabývajících se touto logikou je běžnou konvencí vynechávat symbol & a psát pouze $\varphi\psi$ místo $\varphi \& \psi$.

[8] Tato nezávislost na volbě překladu také zajišťuje, že libovolný fragment (neasociativní logiky) FL obsahující alespoň / nebo \ je substrukturální logikou ve smyslu konvence 2.1.10.

(id_l)	$\varphi\backslash\varphi$	(identity)
(pf_l)	$(\varphi\backslash\psi)\backslash[(\chi\backslash\varphi)\backslash(\chi\backslash\psi)]$	(prefixing)
(as_{ll})	$\varphi\backslash[(\psi/\varphi)\backslash\psi]$	(assertion)
(a)	$[(\psi\backslash\chi)/\varphi]\backslash[\psi\backslash(\chi/\varphi)]$	(associativity)
$(\&\backslash/)$	$[\psi(\psi\backslash\varphi)/\psi]\backslash(\varphi/\psi)$	(fusion divisions)
$(\&\wedge)$	$[(\varphi\wedge\overline{1})(\psi\wedge\overline{1})]\backslash(\varphi\wedge\psi)$	(fusion conjunction)
$(\wedge\backslash)$	$(\varphi\wedge\psi)\backslash\varphi$	(conjunction division)
$(\wedge\backslash)$	$(\varphi\wedge\psi)\backslash\psi$	(conjunction division)
$(\backslash\wedge)$	$[(\varphi\backslash\psi)\wedge(\varphi\backslash\chi)]\backslash[\varphi\backslash(\psi\wedge\chi)]$	(division conjunction)
$(\backslash\vee)$	$\varphi\backslash(\varphi\vee\psi)$	(division disjunction)
$(\backslash\vee)$	$\psi\backslash(\varphi\vee\psi)$	(division disjunction)
$(\vee\backslash)$	$[(\varphi\backslash\chi)\wedge(\psi\backslash\chi)]\backslash[(\varphi\vee\psi)\backslash\chi]$	(disjunction division)
$(\backslash\&)$	$\psi\backslash(\varphi\backslash\varphi\psi)$	(division fusion)
$(\&\backslash)$	$[\psi\backslash(\varphi\backslash\chi)]\backslash(\varphi\psi\backslash\chi)$	(fusion division)
$(\overline{1})$	$\overline{1}$	(unit)
$(\overline{1}\backslash)$	$\overline{1}\backslash(\varphi\backslash\varphi)$	(unit division)
$(\backslash\overline{1})$	$\varphi\backslash(\overline{1}\backslash\varphi)$	(division unit)
(mp_l)	$\varphi,\varphi\backslash\psi\vdash\psi$	(*modus ponens*)
(adj_u)	$\varphi\vdash\varphi\wedge\overline{1}$	(adjunction unit)
(pn_l)	$\varphi\vdash\psi\backslash\varphi\psi$	(product normality)
(pn_r)	$\varphi\vdash\psi\varphi/\psi$	(product normality)

Tabulka 2.3: Axiomatický systém pro logiku FL

$$\varphi \backslash \varphi \qquad \varphi, \varphi \backslash \psi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash (\varphi \backslash \psi) \backslash \psi$$

$$\varphi \backslash \psi \vdash (\psi \backslash \chi) \backslash (\varphi \backslash \chi) \qquad \psi \backslash \chi \vdash (\varphi \backslash \psi) \backslash (\varphi \backslash \chi)$$

$$\varphi \backslash ((\psi / \varphi) \backslash \psi) \qquad \varphi \backslash (\psi \backslash \chi) \vdash \psi \backslash (\chi / \varphi) \qquad \psi / \varphi \vdash \varphi \backslash \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \backslash \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \backslash \psi \qquad (\chi \backslash \varphi) \wedge (\chi \backslash \psi) \backslash (\chi \backslash \varphi \wedge \psi) \qquad \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$$

$$\varphi \backslash \varphi \vee \psi \qquad \psi \backslash \varphi \vee \psi \qquad (\varphi \backslash \chi) \wedge (\psi \backslash \chi) \backslash (\varphi \vee \psi \backslash \chi) \qquad (\chi / \varphi) \wedge (\chi / \psi) \backslash (\chi / \varphi \vee \psi)$$

$$\psi \backslash (\varphi \backslash \varphi\psi) \qquad \psi \backslash (\varphi \backslash \chi) \vdash \varphi\psi \backslash \chi$$

$$\overline{1} \qquad \overline{1} \backslash (\varphi \backslash \varphi) \qquad \varphi \backslash (\overline{1} \backslash \varphi)$$

Tabulka 2.4: Axiomatický systém pro neasociativní logiku FL

VĚTA 2.1.14. *Logika* $\mathrm{SL_a}$ *je termově ekvivalentní omezené logice* FL *užitím libovolného z výše uvedených překladů. Obdobně, logika* SL *je termově ekvivalentní omezené neasociativní variantě logiky* FL.

Důkaz. Všechny axiomy a pravidla (neasociativní) logiky FL jsou mezi konsekucemi uvedenými v tabulce 2.2 nebo jsou dokázány v tvrzení 2.1.5 nebo jsou ekvivalentní asociativitě podle věty 2.1.7. Druhý směr ponecháváme jako cvičení pro čtenáře. □

(id)	$\varphi \to \varphi$
(pf)	$(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$
(per)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
$(\&\wedge)$	$[(\varphi \wedge \overline{1})(\psi \wedge \overline{1})] \to (\varphi \wedge \psi)$
$(\wedge\to)$	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
$(\wedge\to)$	$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
$(\to\wedge)$	$[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)] \to [\varphi \to (\psi \wedge \chi)]$
$(\to\vee)$	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
$(\to\vee)$	$\psi \to (\varphi \vee \psi)$
$(\vee\to)$	$[(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \vee \psi) \to \chi]$
$(\to\&)$	$\psi \to (\varphi \to \varphi\psi)$
$(\&\to)$	$[\psi \to (\varphi \to \chi)] \to (\varphi\psi \to \chi)$
$(\overline{1})$	$\overline{1}$
$(\overline{1}\to)$	$\overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$
(mp)	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$
(adj_u)	$\varphi \vdash \varphi \wedge \overline{1}$

Tabulka 2.5: Axiomatický systém pro $\mathrm{FL_e}$

Jako důsledek této věty víme, že význačné extenze $\mathrm{SL_a}$, které jsme zde uvažovali, jsou jinou verzí dobře známých omezených extenzí logiky FL běžně studovaných v literatuře o substrukturálních logikách. Konkrétně $\mathrm{SL}_{\mathrm{a},X}$ splývá s omezenou verzí FL_X (pro $X \subseteq \{\mathrm{e}, \mathrm{c}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\}$, modulo jazykový překlad); tyto logiky jsou v [27] nazývány *základními substrukturálními logikami*.

Jelikož v substrukturálních logikách rozšiřujících $\mathrm{SL_e}$ je potřeba pouze jedna implikace, získáme pro logiku $\mathrm{FL_e}$ podstatně zjednodušený axiomatický systém, uvádíme ho v tabulce 2.5 (převzato z [27, Figure 2.9]). Dále lze snadno nahlédnout, že přirozený axiomatický systém pro logiku $\mathrm{FL_{ew}}$ můžeme získat ze systému pro $\mathrm{FL_e}$ nahrazením axiomu $(\&\wedge)$ jednodušším axiomem $\varphi \,\&\, \psi \to \varphi \wedge \psi$ a odstraněním axiomů $(\overline{1})$ a $(\overline{1}\to)$ a pravidla (adj_u).

2.2 Věta o dedukci a vlastnost důkazu po případech

V této části budeme studovat různé formy věty o dedukci, které následně využijeme k získání takzvané vlastnosti důkazu po případech. Pevně zvolme substrukturální logiku L v jazyce $\mathcal{L}$.

Připomeňme, že pracujeme s pevně zvolenou množinou výrokových proměnných *Var*. Nechť $\star \notin Var$ je nový symbol, který slouží jako zástupný symbol pro speciální druh substituce. $\star$-formule jsou utvořeny užitím proměnných z $Var \cup \{\star\}$ a $\star$-substituce je substituce v rozšířeném jazyce. Nechť φ a δ jsou $\star$-formule a σ nechť je $\star$-substituce definovaná jako $\sigma(\star) = \varphi$ a $\sigma p = p$ pro $p \in Var$. $\star$-formuli $\sigma\delta$ budeme značit $\delta(\varphi)$; všimněme si, že pokud je φ formule (tj. neobsahuje proměnnou $\star$), pak totéž platí pro $\delta(\varphi)$.

DEFINICE 2.2.1. *Pro množinu $\star$-formulí Γ definujeme množinu $\star$-formulí Γ^* jako nejmenší množinu takovou, že:*

- $\star \in \Gamma^*$ *a zároveň*
- $\delta(\gamma) \in \Gamma^*$ *pro každé $\delta \in \Gamma$ a každou $\gamma \in \Gamma^*$.*

DEFINICE 2.2.2. *Předpokládejme, že* L *ve svém jazyce* $\mathcal{L}$ *obsahuje* & *a* $\overline{1}$. *Pro množinu* $\star$-*formulí* Γ, $\mathcal{L}$-*algebru* $\boldsymbol{A}$ *a množinu* $X \subseteq A$ *definujeme:*

- $\Pi(\Gamma)$ *jako nejmenší množinu* $\star$-*formulí obsahující* $\Gamma \cup \{\overline{1}\}$ *uzavřenou na* &.
- $\Gamma^{\boldsymbol{A}}$ *jako množinu unárních polynomů sestavených užitím termů z* Γ *s koeficienty z* A *a proměnnou* $\star$, *tj.:*

$$\Gamma^{\boldsymbol{A}} = \{\delta(\star, a_1, \dots, a_n) \mid \delta(\star, p_1, \dots, p_n) \in \Gamma \text{ a } a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

- $\Gamma^{\boldsymbol{A}}(X)$ *jako množinu* $\{\delta^{\boldsymbol{A}}(x) \mid \delta(\star) \in \Gamma^{\boldsymbol{A}} \text{ a } x \in X\}$.

Pokud je kontext zřejmý, index $\boldsymbol{A}$ vynecháváme. Poznamenejme, že prvky $\Pi(\Gamma)$ mohou být jednoznačně popsány jako konečné stromy s uzly označenými pomocí prvků z $\Gamma \cup \{\overline{1}\}$.[9]

DEFINICE 2.2.3 ((Téměř) (MP)-založená logika, základní deduktivní termy). *Nechť* bDT *je množina* $\star$-*formulí uzavřená na všechny* $\star$-*substituce* σ *takové, že* $\sigma(\star) = \star$. *Substrukturální logika* L *je* téměř (MP)-založená s množinou základních deduktivních termů bDT[10], *pokud:*

- L *má prezentaci, kde jedinými odvozovacími pravidly jsou* modus ponens *a dále pravidla z* $\{\varphi \rhd \gamma(\varphi) \mid \varphi \in Fm_{\mathcal{L}} \text{ a } \gamma \in \mathrm{bDT}\}$, *a navíc*
- *pro každé* $\beta \in \mathrm{bDT}$ *a všechny formule* φ, ψ *existují formule* $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{bDT}^*$ *takové, že:*

$$\vdash_{\mathrm{L}} \beta_1(\varphi \to \psi) \to (\beta_2(\varphi) \to \beta(\psi)).$$

Říkáme, že L *je* (MP)-založená, *pokud připouští prázdnou množinu základních deduktivních termů.*

Snadno si uvědomíme, že BCI, BCK, a tedy i všechna jejich axiomatická rozšíření (včetně $\mathrm{FL_{ew}}$, IL a CL) jsou očividně (MP)-založené logiky, zatímco $\mathrm{FL_e}$ je téměř (MP)-založená s $\mathrm{bDT} = \{\star \wedge \overline{1}\}$ (porovnejte s axiomatickým systémem z tabulky 2.5 a ($\mathrm{P_{SL}}$24)), $\mathrm{FL_{ew}}$ je dokonce (MP)-založená. Otázka, jsou-li FL, nebo dokonce SL téměř (MP)-založenými logikami, je mnohem komplikovanější a budeme se jí zabývat v příští sekci této kapitoly. Poznamenejme, že axiomatický systém FL (tabulka 2.3) již obsahuje pravidla v žádaném tvaru, takže jediné, co musíme ověřit, je druhá podmínka z definice; na druhou stranu axiomatický systém pro SL (tabulka 2.4) je očividně nevhodný, a proto bude muset být nahrazen jiným.

Také si všimněme, že každé axiomatické rozšíření (téměř) (MP)-založené logiky je též (téměř) (MP)-založené. Nakonec si všimněme, že díky ($\mathrm{P_{SL}}$7) platí $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi(\varphi)$ pro každou formuli $\chi \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$), a pokud $\mathrm{bDT} = \emptyset$ (tj. logika L je (MP)-založená), pak $\mathrm{bDT}^* = \{\star\}$.

LEMMA 2.2.4. *Nechť* L *je substrukturální téměř* (MP)-*založená logika s množinou základních deduktivních termů* bDT, *pak:*

1. *Pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ *a formule* φ, ψ *existuje* $\gamma' \in \mathrm{bDT}^*$ *taková, že*

$$\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \gamma'(\varphi) \to \gamma(\psi).$$

[9] Mohl by však vyvstat problém, pokud by Γ obsahovala konjunkci dvou svých prvků; pak existují (alespoň) dva stromy reprezentující tuto formuli jako konjunkci prvků z Γ. Je ale zřejmé, že existuje strom, který obsahuje všechny možné reprezentující stromy jako své podstromy; tento maximální strom volíme za onu jednoznačně určenou reprezentaci.

[10] Z angl. „basic deduction terms“. (Pozn. překladatele.)

2. *Pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ *a formule* φ, ψ *existují* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{bDT}^*$ *takové, že*
$$\vdash_{\mathrm{L}} \gamma_1(\varphi \to \psi) \to (\gamma_2(\varphi) \to \gamma(\psi)).$$
3. *Pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ *a formule* φ, ψ *existují* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{bDT}^*$ *takové, že*
$$\vdash_{\mathrm{L}} \gamma_1(\varphi) \,\&\, \gamma_2(\psi) \to \gamma(\varphi \,\&\, \psi).$$
4. *Pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ *a* $\delta \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ *a každou formuli* φ *existuje* $\hat{\delta} \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ *taková, že*
$$\vdash_{\mathrm{L}} \hat{\delta}(\varphi) \to \gamma(\delta(\varphi)).$$

Důkaz. Důkaz prvních dvou tvrzení provedeme zároveň indukcí. Nultý krok $\gamma = \star$ je triviální v obou případech. Předpokládejme nyní, že $\gamma = \beta(\delta)$ pro nějakou $\beta \in \mathrm{bDT}$ a $\delta \in \mathrm{bDT}^*$. Z indukčního předpokladu pro první tvrzení dostaneme $\delta' \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že
$$\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \delta'(\varphi) \to \delta(\psi).$$
Nyní použijeme definici bDT, čímž pro všechny formule $\delta'(\varphi)$ a $\delta(\psi)$ získáme $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že:
$$\vdash_{\mathrm{L}} \beta_1(\delta'(\varphi) \to \delta(\psi)) \to (\beta_2(\delta'(\varphi)) \to \beta(\delta(\psi))).$$
Tudíž, pokud zvolíme $\gamma' = \beta_2(\delta')$, je důkaz prvního tvrzení dokončen (jelikož víme, že platí $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \beta_1(\delta'(\varphi) \to \delta(\psi))$).

Pro důkaz druhého tvrzení předpokládejme, že $\gamma = \beta(\delta)$ pro nějaké $\beta \in \mathrm{bDT}$ a $\delta \in \mathrm{bDT}^*$. Indukční předpoklad nám dává $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že
$$\vdash_{\mathrm{L}} \delta_1(\varphi \to \psi) \to (\delta_2(\varphi) \to \delta(\psi)).$$
Nyní použijeme definici bDT pro $\delta_2(\varphi)$ a $\delta(\psi)$, ze které získáme $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{bDT}^*$ tak, že:
$$\vdash_{\mathrm{L}} \beta_1(\delta_2(\varphi) \to \delta(\psi)) \to (\beta_2(\delta_2(\varphi)) \to \beta(\delta(\psi))).$$
Z prvního tvrzení, kde $\gamma = \beta_1$, $\varphi = \delta_1(\varphi \to \psi)$, $\psi = \delta_2(\varphi) \to \delta(\psi)$ získáme $\beta_1' \in \mathrm{bDT}^*$ tak, že
$$\vdash_{\mathrm{L}} \beta_1'(\delta_1(\varphi \to \psi)) \to \beta_1(\delta_2(\varphi) \to \delta(\psi)).$$
Důkaz zakončíme zvolením $\gamma_1 = \beta_1'(\delta_1)$, $\gamma_2 = \beta_2(\delta_2)$ a použitím tranzitivity.

Třetí tvrzení dokážeme užitím druhého pro $\psi = \varphi \,\&\, \psi$, čímž získáme $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{bDT}^*$ tak, že
$$\vdash_{\mathrm{L}} \gamma_1(\varphi \to \varphi \,\&\, \psi) \to (\gamma_2(\varphi) \to \gamma(\varphi \,\&\, \psi)).$$
Protože platí $\vdash_{\mathrm{L}} \psi \to (\varphi \to \varphi \,\&\, \psi)$ ($\mathrm{P_{SL}}7$), můžeme použít první tvrzení pro $\gamma = \gamma_1$, čímž získáme $\gamma_1' \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že
$$\vdash_{\mathrm{L}} \gamma_1'(\psi) \to \gamma_1(\varphi \to \varphi \,\&\, \psi).$$
Zbytek je snadným důsledkem (T) a (Res).

Důkaz posledního tvrzení probíhá indukcí podle hloubky stromu reprezentujícího formuli δ. Pokud $\delta \in \mathrm{bDT}^*$ nebo $\delta = \overline{1}$, pak jsme hotovi zvolením $\hat{\delta} = \gamma(\delta)$, respektive $\hat{\delta} = \overline{1}$. Dále předpokládejme, že $\delta = \eta_1 \,\&\, \eta_2$ pro nějaké $\eta_1, \eta_2 \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$. Z třetího tvrzení dostaneme $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že $\vdash_{\mathrm{L}} \gamma_1(\eta_1(\varphi)) \,\&\, \gamma_2(\eta_2(\varphi)) \to \gamma(\eta_1(\varphi) \,\&\, \eta_2(\varphi))$. Indukční předpoklad nám dává $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\vdash_{\mathrm{L}} \hat{\delta}_1(\varphi) \to \gamma_1(\eta_1(\varphi))$ a $\vdash_{\mathrm{L}} \hat{\delta}_2(\varphi) \to \gamma_2(\eta_2(\varphi))$. Zvolením $\hat{\delta} = \hat{\delta}_1 \,\&\, \hat{\delta}_2$ a užitím ($\mathrm{P_{SL}}10$) důkaz končí. □

Nyní jsme připraveni ukázat sémantickou (neboli přenesenou) verzi (parametrizované) lokální věty o dedukci pro téměř (MP)-založené substrukturální logiky.

VĚTA 2.2.5. *Nechť substrukturální logika* L *má v jazyce spojky* & *a* $\overline{1}$ *a je téměř* (MP)*-založená s množinou základních deduktivních termů* bDT. *Dále nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* $\mathcal{L}$*-algebra a* $X \cup \{x\} \subseteq A$. *Pak*

$$\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}(X, x) = \{y \mid \gamma^{\boldsymbol{A}}(x) \to^{\boldsymbol{A}} y \in \mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}(X) \textit{ pro nějaké } \gamma \in (\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}\}.$$

Důkaz. Směr zprava doleva: Zřejmě $\gamma(x) \in \mathrm{Fi}(X, x)$ (protože $\varphi \vdash \gamma_0(\varphi)$ pro každé $\gamma_0 \in \mathrm{bDT}^*$, $\varphi, \psi \vdash \varphi \,\&\, \psi$ a $\mathrm{Fi}(X, x)$ je uzavřen na pravidla logiky L). A protože filtr $\mathrm{Fi}(X, x)$ je uzavřen na *modus ponens*, dostaneme: $y \in \mathrm{Fi}(X, x)$.

Abychom ukázali druhý směr, vezměme libovolné $y \in \mathrm{Fi}(X, x)$, ukážeme, že pro každé a v důkazu y z předpokladů $X \cup \{x\}$ (viz tvrzení 1.1.29) existuje $\gamma_a \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\gamma_a(x) \to a \in \mathrm{Fi}(X)$. Pokud $a = x$, zvolíme $\gamma_a = \star$; pokud a je z X nebo je hodnotou nějakého axiomu, zvolíme $\gamma_a = \overline{1}$.

Nyní předpokládejme, že jsme a získali pomocí pravidla *modus ponens* z $b \in \mathrm{Fi}(X, x)$ a $b \to a \in \mathrm{Fi}(X, x)$. Z indukčního předpokladu dostaneme $\gamma_b, \gamma_{b\to a} \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\gamma_{b\to a}(x) \to (b \to a), \gamma_b(x) \to b \in \mathrm{Fi}(X)$. Proto (užitím sufixace) dostaneme $(b \to a) \to (\gamma_b(x) \to a) \in \mathrm{Fi}(X)$ a dále díky tranzitivitě: $\gamma_{b\to a}(x) \to (\gamma_b(x) \to a) \in \mathrm{Fi}(X)$. Zvolíme $\gamma_a = \gamma_b \,\&\, \gamma_{b\to a}$ a zakončíme aplikací pravidla reziduace.

Dále předpokládejme, že $a = \beta(b)$ pro nějaké $\beta \in \mathrm{bDT}$ a je získáno z $b \in \mathrm{Fi}(X, x)$ pomocí pravidla $\varphi \vdash \beta(\varphi)$. Indukční předpoklad nám dává $\gamma_b \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\gamma_b(x) \to b \in \mathrm{Fi}(X)$. Pakračujeme užitím prvního bodu lemmatu 2.2.4, díky kterému dostaneme $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ takové, že $\gamma(\gamma_b(x)) \to \beta(b) \in \mathrm{Fi}(X)$. Dále užitím čtvrtého bodu tohoto lemmatu dostaneme $\hat{\gamma_b} \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\hat{\gamma_b}(x) \to \gamma(\gamma_b(x)) \in \mathrm{Fi}(X)$, důkaz zakončíme aplikací tranzitivity. □

Tato věta má dva důležité důsledky; první z nich, kdy za $\boldsymbol{A}$ zvolíme algebru formulí, je přímočarý. Připomeňme, že v tomto případě platí: $\varphi \in \mathrm{Fi}(\Gamma)$ právě tehdy, když $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.

DŮSLEDEK 2.2.6 (Věta o dedukci pro téměř (MP)-založené logiky). *Nechť substrukturální logika* L *má v jazyce spojky* & *a* $\overline{1}$ *a je téměř* (MP)*-založená s množinou základních deduktivních termů* bDT. *Pak pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ *platí:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \gamma(\varphi) \to \psi \textit{ pro nějaké } \gamma \in \Pi(\mathrm{bDT}^*).$$

Tím jsme získali takzvanou (parametrizovanou, pokud se v množině bDT vyskytují jiné proměnné než $\star$) lokální[11] větu o dedukci pro téměř (MP)-založené logiky. V další části ukážeme, že třída těchto logik zahrnuje logiku SL a její význačné axiomatické extenze (podáme explicitní popis příslušných množin základních dedukčních termů, viz tabulka 2.8).

Jako druhý důležitý důsledek věty 2.2.5 dokážeme následující algebraický popis filtru generovaného danou množinou.

DŮSLEDEK 2.2.7 (Popis generovaných filtrů). *Nechť substrukturální algebraicky implikativní logika* L *má v jazyce spojky* & *a* $\overline{1}$ *a je téměř* (MP)*-založená s množinou základních deduktivních termů* bDT. *Dále nechť* $\boldsymbol{A}$ *je* L*-algebra a* $X \subseteq A$, *pak*

$$\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}(X) = \{a \in A \mid a \geq x \textit{ pro nějaké } x \in (\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}(X)\}.^{12}$$

[11] Termín „lokální“ používáme na zvýraznění faktu, že volba formule γ záleží na formulích z $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$, pro srovnání si připomeňme větu o dedukci pro klasickou logiku, kde jsme vždy mohli volit $\gamma = \star$.

[12] $\leq$ je vlastní uspořádní na $\boldsymbol{A}$ (viz komentář za tvrzením 1.4.7).

Důkaz. Je zřejmé, že platí: $\mathrm{bDT}^*(X) \subseteq \mathrm{Fi}(X)$ (protože $\varphi \vdash \gamma(\varphi)$ pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT}^*$ a $\mathrm{Fi}(X)$ je uzavřený na pravidla logiky L). Navíc z $\varphi, \psi \vdash \varphi \mathbin{\&} \psi$ dostaneme: $(\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}(X) \subseteq \mathrm{Fi}(X)$. Nakonec vezměme $x \in (\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}(X)$. Víme, že $a \geq x$ implikuje $x \to a \geq \overline{1}$, a tak platí: $x \to a \in \mathrm{Fi}(X)$. Tedy díky uzavřenosti $\mathrm{Fi}(X)$ na *modus ponens* jsme dokázali první inkluzi v důkazu.

K důkazu druhé inkluze uvažme $a \in \mathrm{Fi}(X)$. Musí existovat konečná množina $\{x_1, \dots x_n\} = X' \subseteq X$ taková, že $a \in \mathrm{Fi}(X')$ (protože každá téměř (MP)-založená logika je finitární a díky důsledku 1.3.4 je $\mathrm{Fi}(\cdot)$ algebraický uzávěrový operátor). Opakovaným užitím předchozí věty dostaneme $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in (\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}$ takové, že

$$\gamma_n(x_n) \mathbin{\&} (\dots \mathbin{\&} \gamma_1(x_1)\dots) \to a = \gamma_1(x_1) \to (\gamma_2(x_2) \to \dots(\gamma_n(x_n) \to a)\dots) \in \mathrm{Fi}(\emptyset) =$$
$$= \{x \mid x \geq \overline{1}\}.$$

Proto $a \geq x$ pro $x = \gamma_n(x_n) \mathbin{\&} (\dots \mathbin{\&} \gamma_1(x_1)\dots) \in (\Pi(\mathrm{bDT}^*))^{\boldsymbol{A}}(X)$. □

Nyní zavedeme v abstraktní podobě větu o dedukci, která nám umožní analyzovat a vylepšit předchozí výsledky.

DEFINICE 2.2.8. *Nechť* DT *je množina $\star$-formulí. Řekneme, že v slabě implikativní logice* L *platí* věta o téměř implikační dedukci *vzhledem k množině* odvozovacích termů DT*, pokud pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta(\varphi) \to \psi \textit{ pro nějakou } \delta \in \mathrm{DT}.$$

Důsledek 2.2.6 říká, že věta o téměř implikační dedukci platí v každé téměř (MP)-založené logice a $\mathrm{DT} = \Pi(\mathrm{bDT}^*)$. Tento výsledek zesílíme dvěma způsoby: zaprvé ukážeme, za jakých předpokladů lze zjednodušit množinu deduktivních termů, zadruhé ukážeme, že (MP)-založenost dané logiky je podmínkou nutnou.

VĚTA 2.2.9. *Nechť substrukturální logika* L *má v jazyce spojky* & *a* $\overline{1}$ *a platí v ní věta o téměř implikační dedukci vzhledem k množině* DT.

- *V* L *platí věta o téměř implikační dedukci vzhledem k* $\mathrm{DT}' \subseteq \mathrm{DT}$ *právě tehdy, když pro každou $\star$-formuli $\chi \in \mathrm{DT}$ a formuli φ existuje $\delta \in \mathrm{DT}'$ taková, že $\vdash_{\mathrm{L}} \delta(\varphi) \to \chi(\varphi)$.*
- *Pokud je* L *finitární, pak* L *je téměř* (MP)*-založená s množinou*

$$\mathrm{bDT} = \{\sigma\delta \mid \delta \in \mathrm{DT}, \sigma \textit{ je } \star\textit{-substituce taková, že } \sigma(\star) = \star\}.$$

Důkaz. V důkazu prvního tvrzení je směr zprava doleva triviální. Druhý směr je také snadný: z $\vdash_{\mathrm{L}} \chi(\varphi) \to \chi(\varphi)$ dostaneme (užitím věty o dedukci vzhledem k DT): $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi(\varphi)$, a tedy (opět užitím věty o dedukci tentokrát vzhledem k DT′) dostaneme: $\vdash_{\mathrm{L}} \delta(\varphi) \to \chi(\varphi)$ pro nějaké $\delta \in \mathrm{DT}'$.

Nyní ukážeme druhé tvrzení, prvně definujme logiku L′ axiomatizovanou všemi teorémy logiky L a pravidly *modus ponens* a $\{\varphi \rhd \delta(\varphi) \mid \varphi \in Fm_{\mathcal{L}}, \delta \in \mathrm{bDT}\}$ (poznamenejme, že tato množina je očividně uzavřena na substituce). Nechť $\delta = \sigma\delta_0$ pro $\delta_0 \in \mathrm{DT}$ a p je proměnná nevyskytující se v δ_0, pak z $\vdash_{\mathrm{L}} \delta_0(p) \to \delta_0(p)$ díky pravému směru věty o dedukci dostaneme: $p \vdash_{\mathrm{L}} \delta_0(p)$. Definujme substituci σ' nastavením $\sigma' p = \varphi$ a $\sigma' q = \sigma q$ a všimněme si, že $\sigma'\delta(p) = \sigma\delta_0 = \delta(\varphi)$, a tudíž díky strukturalitě obdržíme $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \delta(\varphi)$. Jelikož L je substrukturální logika, a tedy má *modus ponens*, dostaneme $\mathrm{L}' \subseteq \mathrm{L}$.

Nyní předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi$. Díky finitaritě máme $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ pro $\varphi_i \in \Gamma$. Opakovaným užitím věty o dedukci dostaneme $\vdash_{\mathrm{L}} \delta_1(\varphi_1) \to (\delta_2(\varphi_2) \to (\cdots \to (\delta_n(\varphi_n) \to \psi) \ldots)$ pro $\delta_i \in \mathrm{DT}$. Tedy zřejmě platí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathrm{L}'} \psi$, a tedy $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}'$. Nakonec dvojím užitím věty o dedukci na $\varphi \to \psi, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \sigma\delta(\psi)$ se ukáže, že platí poslední podmínka definice množiny základních deduktivních termů. □

Připomeňme standardní značení $\varphi^n = \varphi^{n-1} \,\&\, \varphi$ (kde $\varphi^0 = \overline{1}$). Poznamenejme, že v asociativních substrukturálních logikách je závorkování v φ^n nepodstatné.

DŮSLEDEK 2.2.10 (Věta o lokální dedukci pro asociativní (MP)-založené logiky). *Nechť* L *je asociativní substrukturální logika s* & *a* $\overline{1}$ *v jazyce. Pak platí:* L *je* (MP)*-založená právě tehdy, když* L *je finitární a pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ *platí následující:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi^n \to \psi \textit{ pro nějaké } n \geq 0.$$

Důkaz. Směr zleva doprava plyne z důsledku 2.2.6. Druhý směr: všimněme si, že předchozí věta nám říká, že L je téměř (MP)-založená s množinou $\mathrm{bDT} = \{\star^n \mid n \geq 1\}$. Díky ($\mathrm{P_{SL}}7$) víme, že každé pravidlo $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi^n$ je v L redundantní. Logika L je tedy (MP)-založená. □

Viděli jsme, že logika $\mathrm{FL_{ew}}$ je příkladem (MP)-založené logiky. Tím jsme také ukázali, že pro ni platí tato forma věty o dedukci (totéž očividně také platí pro každé její axiomatické rozšíření jako IL a CL). Tento důsledek můžeme naopak použít, chceme-li ukázat, že $\mathrm{FL_e}$ není (MP)-založená: neboť z $\varphi \vdash_{\mathrm{FL_e}} \varphi \wedge \overline{1}$ by plynula dokazatelnost formule $\varphi^n \to \varphi \wedge \overline{1}$ pro nějaké n. To lze ale snadno vyvrátit jednoduchým sémantickým protipříkladem.

Omezenější verzi následujícího tvrzení bychom mohli získat jako důsledek naší obecné teorie, dáme zde ale přednost přímému důkazu, což nám umožní pokrýt i logiky v jazyce pouze s implikací, počínaje logikou BCKW (tj. implikačním fragmentem intuicionistické logiky).

VĚTA 2.2.11 (Věta o dedukci pro (MP)-založené rozšíření logiky BCKW.). *Nechť* L *je substrukturální logika. Pak* L *je* (MP)*-založené rozšíření logiky* BCKW *právě tehdy, když* L *je finitární a pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ *platí následující:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi.$$

Důkaz. Jeden směr důkazu lze provést standardně indukcí, jak jsme zvyklí z důkazu věty o dedukci pro klasickou logiku. Opačný směr: Ukážeme, že L je (MP)-založená obdobně jako v důkazu věty 2.2.9. Musíme tedy pouze ukázat, že se jedná o rozšíření BCKW. Připomeňme, že tato logika může být axiomatizována následujícími axiomy (a pravidlem *modus ponens*):

- $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$.

Všechny tyto axiomy lze v L snadno dokázat (opakovaným) aplikováním věty o dedukci na následující pravidla (která jsou očividně odvoditelná v každé substrukturální logice):

- $\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \vdash \chi$
- $\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi \vdash \chi$
- $\psi, \varphi \vdash \psi$
- $\varphi \to (\varphi \to \psi), \varphi \vdash \psi$. □

Připomeňme si tvrzení 1.3.13, kde jsme užitím věty o dedukci pro klasickou a intuicionistickou logiku dokázali takzvanou vlastnost důkazu po případech:[13]

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}\,.$$

Na závěr této sekce ukážeme, že velmi podobnou vlastnost lze získat pro všechny téměř (MP)-založené logiky. Nemůžeme ale použít pouze svazovou spojku $\vee$ (jak ukazuje příklad 3.1.7), nýbrž komplexnější takzvanou „zobecněnou disjunkci“ sestavenou z množiny základních deduktivních termů patřících k dané logice. V příští kapitole uvidíme, že i takto komplikované disjunkce mají řadu užitečných vlastností.

VĚTA 2.2.12 (Vlastnost důkazu po případech). *Nechť substrukturální logika* L *má v jazyce spojky* $\&$, $\vee$, $\wedge$ *a* $\overline{1}$ *a je téměř* (MP)*-založená s množinou základních deduktivních termů* bDT. *Pak následující metapravidlo je platné v logice* L*:*

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \qquad\qquad \Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}{\Gamma \cup \{\alpha(\varphi) \vee \beta(\psi) \mid \alpha, \beta \in (\mathrm{bDT} \cup \{\star \wedge \overline{1}\})^*\} \vdash_{\mathrm{L}} \chi}\,.$$

Důkaz. Uvědomme si, že $\delta \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ je konjunkcí formulí z bDT^*. Definujme formuli δ' jako strukturálně stejnou konjunkci, kde každý konjunkt $\beta \in \mathrm{bDT}^*$ je nahrazen formulí $\beta \wedge \overline{1}$ (tento pojem je dobře definovaný navzdory tomu, že strom reprezentující δ jako konjunkci prvků z bDT^* může být nejednoznačný, viz poznámka pod čarou 9). Indukcí snadno dokážeme:

- Když $\delta = \delta_1 \,\&\, \delta_2$, pak $\delta' = \delta_1' \,\&\, \delta_2'$,
- $\vdash_{\mathrm{L}} \delta' \to \delta$ a $\vdash_{\mathrm{L}} \delta' \to \overline{1}$,
- $\vdash_{\mathrm{L}} \eta \,\&\, \delta' \to \eta$ a $\vdash_{\mathrm{L}} \delta' \,\&\, \eta \to \eta$.

Dále předpokládejme, že $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Z důsledku 2.2.6 dostaneme $\delta_\varphi, \delta_\psi \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ takové, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta_\varphi(\varphi) \to \chi$ a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta_\psi(\psi) \to \chi$. Tedy také $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta_\varphi'(\varphi) \to \chi$ a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta_\psi'(\psi) \to \chi$ a z toho užitím ($\vee$3) dostaneme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \delta_\varphi'(\varphi) \vee \delta_\psi'(\psi) \to \chi$.

Důkaz zakončíme ověřením, že pro každou dvojici $\delta, \gamma \in \Pi(\mathrm{bDT}^*)$ platí:

$$\{\alpha(\varphi) \vee \beta(\psi) \mid \alpha, \beta \in (\mathrm{bDT} \cup \{\star \wedge \overline{1}\})^*\} \vdash_{\mathrm{L}} \delta'(\varphi) \vee \gamma'(\psi).$$

Důkaz provedeme indukcí podle součtu hloubek stromů, které tyto formule reprezentují. Nultý krok indukce platí triviálně ($\delta'(\varphi) \vee \gamma'(\psi) = (\delta(\varphi) \wedge \overline{1}) \vee (\gamma(\psi) \wedge \overline{1})$; tato formule je mezi premisami). Pro indukční krok předpokládejme, že $\gamma = \gamma_1 \,\&\, \gamma_2$. Užitím ($\mathrm{P_{SL}}$20), ($\mathrm{P_{SL}}$21), ($\vee$1), ($\vee$2), ($\vee$3) a nahoře uvedených vlastností δ' získáme následující řetězec implikací:

$$(\delta'(\varphi) \vee \gamma_1'(\psi)) \,\&\, (\delta'(\varphi) \vee \gamma_2'(\psi)) \to$$

$$\to [\delta'(\varphi) \,\&\, \delta'(\varphi)] \vee [\delta'(\varphi) \,\&\, \gamma_2'(\psi)] \vee [\gamma_1'(\psi) \,\&\, \delta'(\varphi)] \vee [\gamma_1'(\psi) \,\&\, \gamma_2'(\psi)] \to$$

$$\to \delta'(\varphi) \vee \delta'(\varphi) \vee \delta'(\varphi) \vee [\gamma_1'(\psi) \,\&\, \gamma_2'(\psi)] \to \delta'(\varphi) \vee \gamma'(\psi).$$

Indukční předpoklad aplikovaný na $\delta(\varphi) \vee \gamma_1(\psi)$ a $\delta(\varphi) \vee \gamma_2(\psi)$ a užití ($\mathrm{Adj}_\&$) důkaz zakončí. □

Pokud bDT^* obsahuje formuli δ takovou, že $\vdash_{\mathrm{L}} \delta \leftrightarrow \star \wedge \overline{1}$ (toto platí např. ve všech význačných axiomatických extenzích logiky SL uvedených v tabulce 2.8, mimo jiné také díky faktu $\vdash_{\mathrm{SL_w}} \varphi \leftrightarrow \varphi \wedge \overline{1}$), nemusíme ve znění předchozí věty psát „navíc“ formuli $\star \wedge \overline{1}$.

[13] V oné větě jsme zvolili poněkud odlišnou formulaci, více detailů o možných formulacích této vlastnosti lze nalézt v následující kapitole.

2.3 Téměř (MP)-založené axiomatizace substrukturálních logik

V minulé sekci jsme si ukázali, že FL_{ew} je příklad (MP)-založené logiky a FL_e je příklad *téměř* (MP)-založené logiky, která není (MP)-založená. Situace ohledně FL je složitější. Když si prohlédneme axiomatický systém logiky FL (tabulka 2.3), zjistíme, že již obsahuje pravidla v patřičné podobě, nabízí tak kandidáty na množinu bDT pro tuto logiku. Pro její formulaci zavedeme nový pojem: konjugát.

DEFINICE 2.3.1 (Levý, pravý a iterovaný konjugát). *Pro formuli α definujeme její* levý a pravý konjugát *vůči α jako $\lambda_\alpha(\star) = \alpha \to \star \mathbin{\&} \alpha$ a $\rho_\alpha(\star) = \alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \star$.*

Iterovaný konjugát *je pak formule ve tvaru $\gamma(\star) = \gamma_{\alpha_1}(\gamma_{\alpha_2}(\dots(\gamma_{\alpha_{n-1}}(\gamma_{\alpha_n}(\star)\wedge\overline{1})\wedge\overline{1})\dots)\wedge\overline{1}$, kde každé γ_{α_i} je buď λ_{α_i}, nebo ρ_{α_i}.*[14]

VĚTA 2.3.2. FL *je téměř* (MP)-*založená s množinou základních deduktivních termů:*

$$\mathrm{bDT_{FL}} = \{\lambda_\alpha(\star), \rho_\alpha(\star), \star \wedge \overline{1} \mid \alpha \in Fm_{\mathcal{L}}\}.$$

Důkaz. Všimněme si, že je tato množina uzavřena na všechny substituce splňující $\sigma(\star) = \star$. Tedy abychom dokázali, že $\mathrm{bDT_{FL}}$ je množina základních deduktivních pravidel logiky FL, stačí ukázat, že platí následující:

$$\vdash (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \wedge \overline{1} \to \psi \wedge \overline{1}),$$

$$\vdash \rho_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\rho_\alpha(\varphi) \to \rho_\alpha(\psi)),$$

$$\vdash \lambda_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\lambda_\alpha(\varphi) \to \lambda_\alpha(\psi)).$$

První tvrzení je již dokázané jako (P_{SL}24). Důkaz dalších dvou tvrzení je velmi založen na asociativitě; budeme využívat její různé varianty zavedené ve větě 2.1.7. Nejprve ukážeme, že platí tato užitečná formule: $(\varphi \to \psi) \to (\alpha \mathbin{\&} \varphi \to \alpha \mathbin{\&} \psi)$. Z ($P_{SL}$7) ve tvaru $(\psi \to (\alpha \to \alpha \mathbin{\&} \psi))$ a díky prefixaci dostaneme $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\alpha \to \alpha \mathbin{\&} \psi))$, zbytek plyne z asociativity užitím tranzitivity. Důkaz druhého tvrzení:

(a)	$(\varphi \rightsquigarrow \psi) \to ((\alpha \rightsquigarrow \varphi) \rightsquigarrow (\alpha \rightsquigarrow \psi))$	zrcadlový obraz asociativity
(b)	$(\psi \rightsquigarrow (\varphi \rightsquigarrow \alpha)) \to (\psi \mathbin{\&} \varphi \rightsquigarrow \alpha)$	zrcadlový obraz asociativity
(c)	$(\varphi \to \psi) \to (\alpha \mathbin{\&} \varphi \to \alpha \mathbin{\&} \psi)$	dokázáno výše
(d)	$\alpha \mathbin{\&} \varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \psi)$	(c) a ($E_\rightsquigarrow$)
(e)	$(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \varphi) \to [\alpha \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \psi)]$	(d) a zrcadlový obraz (P_{SL}6)
(f)	$(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \varphi) \to [\alpha \mathbin{\&} (\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \psi]$	(e) a zrcadlový obraz (b)
(g)	$(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \varphi) \to [(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} (\varphi \to \psi)) \rightsquigarrow (\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \psi)]$	(f) a instance (a)
(h)	$(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} (\varphi \to \psi)) \to [(\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \varphi) \to (\alpha \rightsquigarrow \alpha \mathbin{\&} \psi)]$	(g) a ($E_\rightsquigarrow$)

[14] V literatuře o substrukturálních logikách pojmy λ_ε a ρ_ε označují o něco komplikovanější termy, konkrétně: $\lambda_\varepsilon = (\varepsilon \to \star \mathbin{\&} \varepsilon) \wedge \overline{1}$ a $\rho_\varepsilon = (\varepsilon \rightsquigarrow \varepsilon \mathbin{\&} \star) \wedge \overline{1}$. V teorii reziduovaných svazů se těmto termům říká levý a pravý konjugát a využívají se k získání bijekce mezi svazem kongruencí a svazem konvexních normálních podalgeber; viz například [27, Theorem 3.47].

(R)	$\vdash \varphi \to \varphi$	(As)	$\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$
(MP)	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$	($\mathrm{As}_{\ell\ell}$)	$\vdash \varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$
(Sf)	$\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(Symm_1)	$\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$
(Pf)	$\psi \to \chi \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow 1}$)	$\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$
(Res_1)	$\psi \to (\varphi \to \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \chi$	(R$'$)	$\vdash \overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$
($\mathrm{Adj}_{\&}$)	$\vdash \varphi \to (\psi \to \psi \,\&\, \varphi)$	(Push)	$\vdash \varphi \to (\overline{1} \to \varphi)$
(Bot)	$\vdash \bot \to \varphi$	($\overline{1}$)	$\vdash \overline{1}$
($\wedge$1)	$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$	($\vee$1)	$\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$
($\wedge$2)	$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$	($\vee$2)	$\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$
($\wedge$3)	$\vdash (\chi \to \varphi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi)$	($\vee$3)	$\vdash (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$
(Adj)	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$	($\vee 3_{\rightsquigarrow}$)	$\vdash (\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \vee \psi \rightsquigarrow \chi)$

Tabulka 2.6: Původní axiomatický systém pro SL

Důkaz zbývajícího tvrzení:

(a$'$)	$(\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\varphi \,\&\, \alpha \rightsquigarrow \psi \,\&\, \alpha)$	zrcadlový obraz (c)
(b$'$)	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$	($\mathrm{P_{SL}}1$)
(c$'$)	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \,\&\, \alpha \rightsquigarrow \psi \,\&\, \alpha)$	(a$'$) a instance (b$'$)
(d$'$)	$(\varphi \to \psi) \,\&\, \alpha \to (\varphi \to \psi \,\&\, \alpha)$	(c$'$) a ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow}$)
(e$'$)	$(\alpha \to (\varphi \to \psi) \,\&\, \alpha) \to [\alpha \to (\varphi \to \psi \,\&\, \alpha)]$	(d$'$) a ($\mathrm{P_{SL}}6$)
(f$'$)	$(\alpha \to (\varphi \to \psi) \,\&\, \alpha) \to (\varphi \,\&\, \alpha \to \psi \,\&\, \alpha)$	(e$'$) a asociativita
(g$'$)	$(\alpha \to (\varphi \to \psi) \,\&\, \alpha) \to [(\alpha \to \varphi \,\&\, \alpha) \to (\alpha \to \psi \,\&\, \alpha)]$	(f$'$) a asociativita □

Dále se budeme zabývat logikou SL, v níž je situace značně komplikovanější. V tabulce 2.6 opět uvádíme axiomatický systém logiky SL z tabulky 2.4, tentokrát ovšem v našem jazyce $\mathcal{L}_{\mathrm{SL}}$ (navíc zde pro snadnější odkazování uvádíme názvy konsekucí).

VĚTA 2.3.3. *Axiomatický systém z tabulky 2.7 je prezentace logiky* SL.

Důkaz. Uvažovaný axiomatický systém označme jako $\mathcal{AS}$. Abychom dokázali jeden směr, stačí pouze ukázat, že v SL lze odvodit nová pravidla $\mathcal{AS}$ (většina axiomů $\mathcal{AS}$ je totiž dokázána v části 2.1 a zbytek je velmi snadné dokázat). Naopak ukážeme, že $\mathcal{AS}$ dokazuje všechny axiomy a pravidla SL. Během důkazu dokážeme některá pomocná pravidla/axiomy, ta z nich, která ještě nemají přiřazené jméno (symbol), také hned pro další odkazování pojmenujeme.

SL dokazuje (α):

(a)	$\vdash \chi \to (\psi \to \psi \,\&\, \chi)$	($\mathrm{Adj}_{\&}$)
(b)	$\chi \vdash \psi \to \psi \,\&\, \chi$	(a) a (MP)
(c)	$\chi \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$	($\mathrm{P_{SL}}8$) a (b)

$(\mathrm{Adj}_{\&})$	$\varphi \to (\psi \to \psi \,\&\, \varphi)$	(Bot)	$\bot \to \varphi$
$(\mathrm{Adj}_{\&\rightsquigarrow})$	$\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \varphi \,\&\, \psi)$	$(\&\wedge)$	$(\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, (\psi \wedge \overline{1}) \to \varphi \wedge \psi$
$(\wedge 1)$	$\varphi \wedge \psi \to \varphi$	$(\vee 1)$	$\varphi \to \varphi \vee \psi$
$(\wedge 2)$	$\varphi \wedge \psi \to \psi$	$(\vee 2)$	$\psi \to \varphi \vee \psi$
$(\wedge 3)$	$(\chi \to \varphi) \wedge (\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi)$	$(\vee 3)$	$(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$
(Res')	$\psi \,\&\, (\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \to \chi))) \to \chi$	(Push)	$\varphi \to (\overline{1} \to \varphi)$
$(\mathrm{Res}'_{\rightsquigarrow})$	$(\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi))) \,\&\, \psi \to \chi$	(Pop)	$(\overline{1} \to \varphi) \to \varphi$
(T')	$(\varphi \to (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \,\&\, (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi)$		
$(\mathrm{T}'_{\rightsquigarrow})$	$(\varphi \rightsquigarrow ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \,\&\, \varphi) \,\&\, (\psi \to \chi)) \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$		
(MP)	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$	$(\mathrm{Adj_u})$	$\varphi \vdash \varphi \wedge \overline{1}$
(α)	$\varphi \vdash \delta \,\&\, \varepsilon \to \delta \,\&\, (\varepsilon \,\&\, \varphi)$	(β)	$\varphi \vdash \delta \to (\varepsilon \to (\varepsilon \,\&\, \delta) \,\&\, \varphi)$
(α')	$\varphi \vdash \delta \,\&\, \varepsilon \to (\delta \,\&\, \varphi) \,\&\, \varepsilon$	(β')	$\varphi \vdash \delta \to (\varepsilon \rightsquigarrow (\delta \,\&\, \varepsilon) \,\&\, \varphi)$

Tabulka 2.7: Nový axiomatický systém pro SL

SL dokazuje (α'):

(a)	$\vdash \chi \to (\varphi \to \varphi \,\&\, \chi)$	$(\mathrm{Adj}_{\&})$
(b)	$\chi \vdash \varphi \to \varphi \,\&\, \chi$	(a) a (MP)
(c)	$\chi \vdash \varphi \,\&\, \psi \to (\varphi \,\&\, \chi) \,\&\, \psi$	$(\mathrm{P_{SL}}9)$ a (b)

SL dokazuje (β):

(a)	$\vdash \chi \to (\varphi \,\&\, \psi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi)$	$(\mathrm{Adj}_{\&})$
(b)	$\chi \vdash \varphi \,\&\, \psi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi$	(a) a (MP)
(c)	$\chi \vdash \psi \to (\varphi \to (\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi)$	(b) a (Res)

SL dokazuje (β'):

(a)	$\chi \vdash \varphi \to (\psi \to (\psi \,\&\, \varphi) \,\&\, \chi)$	(β)
(b)	$\chi \vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow (\psi \,\&\, \varphi) \,\&\, \chi)$	(a) a $(\mathrm{E}_{\rightsquigarrow 1})$

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\chi \to \varphi, \varphi \to \psi \vdash \chi \to \psi$ (T):

(a)	$\vdash (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to (\chi \to \psi)$	(T')
(b)	$\varphi \to \psi \vdash (\chi \to \varphi) \to (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi))$	(β)
(c)	$\chi \to \varphi, \varphi \to \psi \vdash (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi))$	(b) a (MP)
(d)	$\chi \to \varphi, \varphi \to \psi \vdash \chi \to \psi$	(a), (c) a (MP)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to \psi \vdash (\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)$ (Pf):

(a)	$\vdash (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to (\chi \to \psi)$	(T')
(b)	$\varphi \to \psi \vdash (\chi \to \varphi) \to (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi))$	(β)
(c)	$\varphi \to \psi \vdash (\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)$	(a), (b) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to \psi \vdash (\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow \psi)$ ($\mathrm{Pf}_{\rightsquigarrow}$):

(a) $\vdash (\chi \rightsquigarrow ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \,\&\, \chi) \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to (\chi \rightsquigarrow \psi)$ ($\mathrm{T}'_{\rightsquigarrow}$)

(b) $\varphi \to \psi \vdash (\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \,\&\, \chi) \,\&\, (\varphi \to \psi))$ (β')

(c) $\varphi \to \psi \vdash (\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow \psi)$ (a), (b) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \,\&\, \varphi \to \chi$ (Res_1):

(a) $\vdash \psi \,\&\, (\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \to \chi))) \to \chi$ (Res')

(b) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \,\&\, \varphi \to \psi \,\&\, (\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \to \chi)))$ (α)

(c) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \,\&\, \varphi \to \chi$ (a), (b) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \chi$ ($\mathrm{Res}_{\rightsquigarrow 1}$):

(a) $\vdash (\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi))) \,\&\, \psi \to \chi$ ($\mathrm{Res}'_{\rightsquigarrow}$)

(b) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to (\varphi \,\&\, (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi))) \,\&\, \psi$ (α')

(c) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \chi$ (a), (b) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ (Res_2):

(a) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash (\psi \to \psi \,\&\, \varphi) \to (\psi \to \chi)$ (Pf)

(b) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash (\varphi \to (\psi \to \psi \,\&\, \varphi)) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$ (a) a (Pf)

(c) $\vdash \varphi \to (\psi \to \psi \,\&\, \varphi)$ ($\mathrm{Adj}_{\&}$)

(d) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ (b), (c) a (MP)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$ ($\mathrm{Res}_{\rightsquigarrow 2}$):

(a) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash (\varphi \rightsquigarrow \psi \,\&\, \varphi) \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$ ($\mathrm{Pf}_{\rightsquigarrow}$)

(b) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash (\psi \to (\varphi \rightsquigarrow \psi \,\&\, \varphi)) \to (\psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi))$ (a) a (Pf)

(c) $\vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow \psi \,\&\, \varphi)$ ($\mathrm{Adj}_{\&\rightsquigarrow}$)

(d) $\psi \,\&\, \varphi \to \chi \vdash \psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$ (b), (c) a (MP)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\psi \to (\varphi \to \chi) \vdash \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)$ ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow 1}$):

(a) $\psi \to (\varphi \to \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \chi$ (Res_1)

(b) $\psi \to (\varphi \to \chi) \vdash \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)$ (a) a ($\mathrm{Res}_{\rightsquigarrow 2}$)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow 2}$):

(a) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \varphi \,\&\, \psi \to \chi$ ($\mathrm{Res}_{\rightsquigarrow 1}$)

(b) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ (a) a (Res_2)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to \varphi$ (R): (Push), (Pop) a (T).

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$ (R$'$):

(a) $\varphi \to \varphi \vdash \overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$ (Push) a (MP)

(b) $\vdash \overline{1} \to (\varphi \to \varphi)$ (R) a (a)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\overline{1}$ ($\overline{1}$):

(a) $\vdash (\overline{1} \to \overline{1}) \to \overline{1}$ (Pop)

(b) $\vdash \overline{1}$ (R), (a) a (MP)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$ (As$_{\ell\ell}$):

(a)	$\vdash (\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\varphi \rightsquigarrow \psi)$	(R)
(b)	$\vdash \varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$	(a) a (E$_{\rightsquigarrow}$2)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ (Sf):

(a)	$\vdash (\psi \to \chi) \to (\psi \to \chi)$	(R)
(b)	$\vdash \psi \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi)$	(a) a (E$_{\rightsquigarrow}$1)
(c)	$\varphi \to \psi \vdash \varphi \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow \chi)$	(Pf), (b) a (MP)
(d)	$\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(c) a (E$_{\rightsquigarrow}$2)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ (As):

(a)	$\varphi \vdash \overline{1} \to \varphi$	(Push) a (MP)
(b)	$\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to (\overline{1} \to \psi)$	(a) a (Sf)
(c)	$\vdash (\overline{1} \to \psi) \to \psi$	(Pop)
(d)	$\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	(b), (c) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (Adj):

(a)	$\varphi \vdash \varphi \wedge \overline{1}$	(Adj$_\mathrm{u}$)
(b)	$\psi \vdash \psi \wedge \overline{1}$	(Adj$_\mathrm{u}$)
(c)	$\vdash \psi \wedge \overline{1} \to (\varphi \wedge \overline{1} \to (\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, (\psi \wedge \overline{1}))$	(Adj$_\&$)
(d)	$\varphi, \psi \vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, (\psi \wedge \overline{1})$	(a), (b), (c) a (MP)
(e)	$\vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \,\&\, (\psi \wedge \overline{1}) \to \varphi \wedge \psi$	(&∧)
(f)	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$	(d), (e) a (MP)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$ (Symm$_1$):

(a)	$\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash \overline{1} \to (\varphi \rightsquigarrow \psi)$	(Push) a (MP)
(b)	$\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash \varphi \to (\overline{1} \to \psi)$	(a) a (E$_{\rightsquigarrow}$2)
(c)	$\vdash (\overline{1} \to \psi) \to \psi$	(Pop)
(d)	$\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$	(b), (c) a (T)

$\mathcal{AS}$ dokazuje $(\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \vee \psi \rightsquigarrow \chi)$ (∨3$_{\rightsquigarrow}$):

(a)	$\vdash (\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$	(∧1)
(b)	$\vdash \varphi \to ((\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$	(E$_{\rightsquigarrow}$2)
(c)	$\vdash \psi \to ((\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$	analogicky
(d)	$\vdash \varphi \vee \psi \to ((\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$	(Adj), (∨3), (MP)
(e)	$\vdash (\varphi \rightsquigarrow \chi) \wedge (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \vee \psi \rightsquigarrow \chi)$	(E$_{\rightsquigarrow}$1) □

Nyní zavedeme užitečné značení pro termy vyskytující se na pravé straně pravidel (α), (α'), (β) a (β'). Pro libovolné formule δ, ε, definujeme následující $\star$-formule:

$$\alpha_{\delta,\varepsilon} = \delta \,\&\, \varepsilon \to \delta \,\&\, (\varepsilon \,\&\, \star) \qquad \beta_{\delta,\varepsilon} = \delta \to (\varepsilon \to (\varepsilon \,\&\, \delta) \,\&\, \star)$$
$$\alpha'_{\delta,\varepsilon} = \delta \,\&\, \varepsilon \to (\delta \,\&\, \star) \,\&\, \varepsilon \qquad \beta'_{\delta,\varepsilon} = \delta \to (\varepsilon \rightsquigarrow (\delta \,\&\, \varepsilon) \,\&\, \star)$$

Poznamenejme, že termy ve druhé řádce zobecňují výše zavedené pojmy levého a pravého konjugátu, jak je patrné z následujícího tvrzení (jehož důkaz ponecháváme jako cvičení pro čtenáře), které ukazuje jak tyto termy, a tedy i axiomatické systémy, ve kterých se vyskytují, mohou být zjednodušeny v silnějších substrukturálních logikách (např. díky pravidlu záměny lze vynechat termy s čárkou, díky asociativitě můžeme nahradit pravidla α, α', β, β' pravidly $\varphi \vdash \rho_\varepsilon(\varphi)$ a $\varphi \vdash \lambda_\varepsilon(\varphi)$) z axiomatizace logiky FL (viz tabulka 2.3).

TVRZENÍ 2.3.4. *Platí:*

1. $\vdash_{\mathrm{SL}} \gamma_{\bar{1},\bar{1}}(\varphi) \leftrightarrow \varphi$ *pro každou formuli* $\gamma \in \{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\}$,
2. $\vdash_{\mathrm{SL_e}} \alpha_{\delta,\varepsilon}(\varphi) \leftrightarrow \alpha'_{\varepsilon,\delta}(\varphi)$ *a* $\vdash_{\mathrm{SL_e}} \beta_{\delta,\varepsilon}(\varphi) \leftrightarrow \beta'_{\delta,\varepsilon}(\varphi)$,
3. $\vdash_{\mathrm{SL_a}} \varphi \to \gamma_{\delta,\varepsilon}(\varphi)$ *pro každou formuli* $\gamma \in \{\alpha,\beta\}$,
4. $\vdash_{\mathrm{SL_a}} \lambda_\varepsilon(\varphi) \to \alpha'_{\delta,\varepsilon}(\varphi)$ *a* $\vdash_{\mathrm{SL_a}} \rho_\varepsilon(\varphi) \to \beta'_{\delta,\varepsilon}(\varphi)$,
5. $\vdash_{\mathrm{SL_a}} \lambda_\varepsilon(\varphi) \leftrightarrow \alpha'_{\bar{1},\varepsilon}(\varphi)$ *a* $\vdash_{\mathrm{SL_a}} \rho_\varepsilon(\varphi) \leftrightarrow \beta'_{\bar{1},\varepsilon}(\varphi)$,
6. $\vdash_{\mathrm{SL_{ae}}} \varphi \to \lambda_\varepsilon(\varphi)$ *a* $\vdash_{\mathrm{SL_{ae}}} \varphi \to \rho_\varepsilon(\varphi)$.

Blížíme se k hlavnímu výsledku této části, k důkazu věty, že logika SL je téměř (MP)-založená. K důkazu se nám budou ještě hodit následující dvě syntaktická lemmata:

LEMMA 2.3.5. *Následující je dokazatelné v* SL:

(Aux1) $\vdash \alpha_{\chi,\varphi}(\varphi \to \psi) \to (\chi \,\&\, \varphi \to \chi \,\&\, \psi)$

(Aux2) $\vdash \alpha'_{\varphi,\chi}(\varphi \to \psi) \to (\varphi \,\&\, \chi \to \psi \,\&\, \chi)$

(Aux3) $\vdash \beta_{\chi\to\varphi,\chi}(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$

(Aux4) $\vdash \beta'_{\chi\rightsquigarrow\varphi,\chi}(\varphi \to \psi) \to ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow \psi))$

Důkaz. SL dokazuje (Aux1):

(a)	$\vdash \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	$(\mathrm{P_{SL}}2)$
(b)	$\vdash \chi \,\&\, (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to \chi \,\&\, \psi$	(a) a $(\mathrm{P_{SL}}8)$
(c)	$\vdash (\chi \,\&\, \varphi \to \chi \,\&\, (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi))) \to (\chi \,\&\, \varphi \to \chi \,\&\, \psi)$	(b) a (Pf)

SL dokazuje (Aux2):

(a)	$\vdash \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	$(\mathrm{P_{SL}}2)$
(b)	$\vdash (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \,\&\, \chi \to \psi \,\&\, \chi$	(a) a $(\mathrm{P_{SL}}9)$
(c)	$\vdash (\varphi \,\&\, \chi \to (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \,\&\, \chi) \to (\varphi \,\&\, \chi \to \psi \,\&\, \chi)$	(b) a (Pf)

SL dokazuje (Aux3):

(a)	$\vdash \chi \,\&\, (\chi \to \varphi) \to \varphi$	$(\mathrm{P_{SL}}2)$
(b)	$\vdash (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)$	(a) a $(\mathrm{P_{SL}}9)$
(c)	$\vdash \varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	$(\mathrm{P_{SL}}2)$
(d)	$\vdash (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$	(b), (c) a (T)
(e)	$\vdash (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to (\chi \to \psi)$	(d) a (Pf)
(f)	$\vdash [(\chi \to \varphi) \to (\chi \to (\chi \,\&\, (\chi \to \varphi)) \,\&\, (\varphi \to \psi))] \to [(\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)]$	(e) a (Pf)

SL dokazuje (Aux4):

(a) $\vdash (\chi \rightsquigarrow \varphi) \mathbin{\&} \chi \to \varphi$ — $(\mathrm{As}_{\ell\ell})$ a (Res_1)

(b) $\vdash ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \mathbin{\&} \chi) \mathbin{\&} (\varphi \to \psi) \to \varphi \mathbin{\&} (\varphi \to \psi)$ — (a) a $(\mathrm{P_{SL}}9)$

(c) $\vdash \varphi \mathbin{\&} (\varphi \to \psi) \to \psi$ — $(\mathrm{P_{SL}}2)$

(d) $\vdash ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \mathbin{\&} \chi) \mathbin{\&} (\varphi \to \psi) \to \psi$ — (b), (c) a (T)

(e) $\vdash (\chi \rightsquigarrow ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \mathbin{\&} \chi) \mathbin{\&} (\varphi \to \psi)) \to (\chi \rightsquigarrow \psi)$ — (d) a $(\mathrm{Pf})_{\rightsquigarrow}$

(f) $\vdash [(\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow ((\chi \rightsquigarrow \varphi) \mathbin{\&} \chi) \mathbin{\&} (\varphi \to \psi))] \to [(\chi \rightsquigarrow \varphi) \to (\chi \rightsquigarrow \psi)]$ — (e) a (Pf) □

LEMMA 2.3.6. *Pro každou* $\star$*-formuli* $\gamma \in \{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon} \mid \delta, \varepsilon$ *formule*$\}$ *a každou dvojici formulí* φ, ψ*, máme:* $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{SL}} \gamma(\varphi) \to \gamma(\psi)$.

Důkaz. Všechny případy je snadné dokázat, důkazy jsou navíc velmi podobné. Ukažme si například důkaz tvrzení pro $\alpha_{\delta,\varepsilon}$:

(a) $\varphi \to \psi \vdash \delta \mathbin{\&} (\varepsilon \mathbin{\&} \varphi) \to \delta \mathbin{\&} (\varepsilon \mathbin{\&} \psi)$ — $(\mathrm{P_{SL}}8)$ dvakrát

(b) $\varphi \to \psi \vdash (\delta \mathbin{\&} \varepsilon \to \delta \mathbin{\&} (\varepsilon \mathbin{\&} \varphi)) \to (\delta \mathbin{\&} \varepsilon \to \delta \mathbin{\&} (\varepsilon \mathbin{\&} \psi))$ — (a) a (Pf) □

VĚTA 2.3.7. SL *je téměř* (MP)*-založená vzhledem k množině*

$$\mathrm{bDT_{SL}} = \{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon}, \star \wedge \overline{1} \mid \delta, \varepsilon \textit{ formule}\}.$$

Důkaz. Podle věty 2.3.3 víme, že existuje prezentace SL s jediným binárním pravidlem (MP) a unárními pravidly $\varphi \vdash \gamma(\varphi)$ pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT_{SL}}$. Zbývá ověřit poslední podmínku z definice téměř (MP)-založených logik. Konkrétně ukážeme, že pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT_{SL}}$ a libovolné formule φ, ψ existuje $\gamma' \in \mathrm{bDT^*_{SL}}$ splňující:

$$\vdash \gamma'(\varphi \to \psi) \to (\gamma(\varphi) \to \gamma(\psi)).$$

Pokud je γ rovna $\star \wedge \overline{1}$, stačí zvolit $\gamma' = \gamma$ s odvoláním na $(\mathrm{P_{SL}}24)$. Dále ukážeme tvrzení pro $\alpha'_{\delta,\varepsilon}$, ostatní případy se dokazují analogicky:

(a) $\alpha_{\delta,\varphi}(\varphi \to \psi) \to [\delta \mathbin{\&} \varphi \to \delta \mathbin{\&} \psi]$ — (Aux1)

(b) $\alpha'_{\delta\&\varphi,\varepsilon}(\delta \mathbin{\&} \varphi \to \delta \mathbin{\&} \psi) \to [(\delta \mathbin{\&} \varphi) \mathbin{\&} \varepsilon \to (\delta \mathbin{\&} \psi) \mathbin{\&} \varepsilon]$ — (Aux2)

(c) $\beta_{\delta\&\varepsilon\to(\delta\&\varphi)\&\varepsilon,\delta\&\varepsilon}((\delta \mathbin{\&} \varphi) \mathbin{\&} \varepsilon \to (\delta \mathbin{\&} \psi) \mathbin{\&} \varepsilon) \to [\alpha'_{\delta,\varepsilon}(\varphi) \to \alpha'_{\delta,\varepsilon}(\psi)]$ — (Aux3)

(d) $\alpha'_{\delta\&\varphi,\varepsilon}(\alpha_{\delta,\varphi}(\varphi \to \psi)) \to \alpha'_{\delta\&\varphi,\varepsilon}(\delta \mathbin{\&} \varphi \to \delta \mathbin{\&} \psi)$ — (a) a lemma 2.3.6

(e) $\alpha'_{\delta\&\varphi,\varepsilon}(\alpha_{\delta,\varphi}(\varphi \to \psi)) \to [(\delta \mathbin{\&} \varphi) \mathbin{\&} \varepsilon \to (\delta \mathbin{\&} \psi) \mathbin{\&} \varepsilon]$ — (b), (d) a (T)

(f) $\beta_{\delta\&\varepsilon\to(\delta\&\varphi)\&\varepsilon,\delta\&\varepsilon}(\alpha'_{\delta\&\varphi,\varepsilon}(\alpha_{\delta,\varphi}(\varphi \to \psi))) \to [\alpha'_{\delta,\varepsilon}(\varphi) \to \alpha'_{\delta,\varepsilon}(\psi)]$ — (e), (c) a lemma 2.3.6 □

Všechna axiomatická rozšíření logiky SL jsou tudíž téměř (MP)-založená vzhledem k množině základních deduktivních termů $\mathrm{bDT_{SL}}$. Pro určité logiky můžeme samozřejmě získat jednodušší množiny základních deduktivních termů: v případě $\mathrm{SL_e}$ použijeme druhý bod tvrzení 2.3.4; v případě logik s pravidlem oslabení využijeme faktu, že pravidlo $(\mathrm{Adj_u})$ je redundantní, a faktu, že term $\star \wedge \overline{1}$ není potřebný v klíčovém kroku věty 2.3.7; v případě asociativních logik je možnost zjednodušení patrná z věty 2.3.2. Tyto výsledky shrnuje tabulka 2.8.

Logika L	$\mathrm{bDT_L}$
SL	$\{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon}, \star \wedge \overline{1} \mid \delta, \varepsilon \text{ formule}\}$
$\mathrm{SL_w}$	$\{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon} \mid \delta, \varepsilon \text{ formule}\}$
$\mathrm{SL_e}$	$\{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \star \wedge \overline{1} \mid \delta, \varepsilon \text{ formule}\}$
$\mathrm{SL_{ew}}$	$\{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon} \mid \delta, \varepsilon \text{ formule}\}$
FL	$\{\lambda_\varepsilon, \rho_\varepsilon, \star \wedge \overline{1} \mid \varepsilon \text{ formule}\}$
$\mathrm{FL_e}$	$\{\star \wedge \overline{1}\}$
$\mathrm{FL_{ew}}$	$\{\star\}$

Tabulka 2.8: Množiny bDT význačných substrukturálních logik

Tento výsledek bychom mohli dostat i jako důsledek věty 2.3.7: Z důkazu této věty a z bodu 5 tvrzení 2.3.4 víme, že pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT_{SL_a}}(= \mathrm{bDT_{FL}})$ a každé dvě formule φ, ψ existuje $\gamma' \in \mathrm{bDT^*_{SL}}$ taková, že:

$$\vdash_{\mathrm{SL}} \gamma'(\varphi \to \psi) \to (\gamma(\varphi) \to \gamma(\psi)).$$

Důkaz zakončíme ukázáním, že pro každou $\gamma' \in \mathrm{bDT^*_{SL}}$ existuje $\gamma_0 \in \mathrm{bDT^*_{SL_a}}$ taková, že pro každou formuli χ platí:

$$\vdash_{\mathrm{SL_a}} \gamma_0(\chi) \to \gamma'(\chi).$$

Nultý krok (pro $\star$) indukce platí triviálně a indukční krok je snadným důsledkem lemmatu 2.3.6 a bodů 3 a 4 z tvrzení 2.3.4.

Na závěr této kapitoly připomeňme, že ve všech téměř (MP)-založených logikách platí téměř implikační věta o dedukci (důsledek 2.2.6) a vlastnost důkazu po případech (věta 2.2.12), tedy pro každou logiku z tabulky 2.8 víme, že:

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \gamma(\varphi) \to \psi \text{ pro nějakou } \gamma \in \Pi(\mathrm{bDT^*_L}).$$

Také následující metapravidlo je v těchto logikách platné (očividně ve všech těchto případech můžeme vynechat term $\star \wedge \overline{1}$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \qquad\qquad \Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}{\Gamma \cup \{\alpha(\varphi) \vee \beta(\psi) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{bDT^*_L}\} \vdash_{\mathrm{L}} \chi}\,.$$

Kapitola 3

Disjunktivní logiky

V předchozí kapitole jsme viděli, že substrukturální logiky mohou mít vlastnost důkazu po případech, ovšem pouze za cenu užití komplexnějšího pojmu disjunkce. Konkrétně pro logiky FL a SL jsme využili vcelku komplikované nekonečné množiny formulí majících dvě proměnné a parametry. Vlastnost důkazu po případech je ekvivalentní řadě jiných zajímavých logických a algebraických vlastností a přítomnost (zobecněné) disjunkce mající tuto vlastnost v dané logice má řadu zajímavých důsledků, které jsou zajímavé samy o sobě a také budou hrát důležitou roli v další kapitole, kde budeme studovat vzájemné vztahy mezi disjunkcemi a implikacemi. Celá tato kapitola je proto zasvěcena abstraktnímu studiu zobecněných disjunkcí.

V první sekci budeme zkoumat disjunkce v takové obecnosti, abychom zachytili i nejkomplikovanější možné podoby, které jsme viděli v minulé kapitole. Kombinací různě silných *forem* vlastnosti důkazu po případech a speciálních podob množin formulí definujících disjunkce vystává bohatá hierarchie disjunkcí a disjunkcionálních logik, které osvětlíme (a oddělíme) mnohými příklady. Ve druhé sekci ukážeme některé (syntaktické a sémantické) charakterizace vlastností důkazu po případech použitím pojmů substituce, (nekonečné) distributivity a prvofiltru. Nakonec ve třetí sekci ukážeme několik dalších výsledků pro logiky mající vhodnou disjunkci.

Mnoho výsledků dokázaných v této kapitole platí zcela obecně, pro naše účely a zároveň pro jednoduchost se ale budeme většinou omezovat na *slabě implikativní* logiky, což nám také umožní dosáhnout silnějších, i když méně obecných výsledků.

3.1 Hierarchie disjunkcí

Začneme zavedením dvou užitečných konvencí, které zjednoduší značení a formulace následných definic a tvrzení.

KONVENCE 3.1.1 (Značení pro zobecněnou disjunkci). *Nechť $\nabla(p, q, \vec{r})$ je množina formulí se dvěma proměnnými p, q a s (potencionálně prázdnou, konečnou, nebo i nekonečnou) sekvencí dalších proměnných $\vec{r}$ zvaných* parametry. *Definujeme:*

$$\varphi\nabla\psi = \{\delta(\varphi, \psi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \delta(p, q, r_1, \ldots, r_n) \in \nabla \text{ a } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Fm_{\mathcal{L}}\}.$$

Pokud množina $\nabla(p, q, \vec{r})$ *neobsahuje parametry, píšeme* $\nabla(p, q)$*, pokud je to navíc singleton, tak píšeme* $\varphi \vee \psi$ *místo* $\varphi \nabla \psi$*. Pro množiny formulí* $\Phi, \Psi \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ $\Phi \nabla \Psi$ *značí množinu* $\bigcup\{\varphi \nabla \psi \mid \varphi \in \Phi, \psi \in \Psi\}$.

KONVENCE 3.1.2 (Protodisjunkce a p-protodisjunkce). *Parametrizovanou množinu formulí* $\nabla(p, q, \vec{r})$ *budeme nazývat* p-protodisjunkcí *v logice* L*, pokud platí:*

(PD) $\quad \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \psi \quad$ *a* $\quad \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \psi.$

Pokud ∇ *nemá žádné parametry, pak nepíšeme předponu „p-“.*

Tato konvence sama o sobě nedefinuje žádný zajímavý pojem, neboť každý teorém (nebo množina teorémů) dané logiky by ve skutečnosti byl její protodisjunkcí; zavádíme tento pojem pouze jako užitečný prostředek ke zkrácení formulací nadcházejících definic a tvrzení. Podstatnější vlastností disjunkce klasické logiky je vlastnost *důkazu po případech* (viz tvrzení 1.3.13). Tato vlastnost byla v literatuře uvažovaná v následujících dvou podobách:[1]

DEFINICE 3.1.3. *Říkáme, že p-protodisjunkce* ∇ *má* vlastnost důkazu po případech *v* L*, pokud pro každou množinu formulí* Γ *a formule* φ, ψ, χ *platí:*

PCP $\quad$ *Pokud* $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Říkáme, že ∇ *má* slabou vlastnost důkazu po případech *v* L*, pokud pro všechny formule* φ, ψ, χ *platí:*

wPCP $\quad$ *Pokud* $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Poznamenejme, že (slabá) vlastnost důkazu po případech je vlastnost dvojice: logiky L a p-protodisjunkce ∇. Pro zjednodušení budeme dále říkat pouze „∇ má PCP“[2], pokud je L pevně zvolena nebo je zřejmé, o jaké logice je řeč. Obdobnou konvenci budeme využívat pro všechny nadcházející vlastnosti definované pro p-protodisjunkce v patřičných logikách.

Následující zřejmé lemma ukazuje, že všechny p-protodisjunkce splňující wPCP jsou vzájemně odvoditelné:

LEMMA 3.1.4. *Předpokládejme, že* ∇ *má* wPCP *a* ∇' *je libovolná p-protodisjunkce. Pak* ∇' *má* wPCP *právě tehdy, když* $\varphi \nabla \psi \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla' \psi$.

Ze slabé vlastnosti důkazu po případech vyplývají ostatní vlastnosti, které by měla disjunkce mít: komutativita, idempotence, asociativita (tyto vlastnosti jsou také běžně splněny konjunkcí, zatímco (PD), PCP a wPCP jsou vlastnosti typické pouze pro disjunkci). Tato pozorování jsou shrnuta v následujícím lemmatu, jehož důkaz je zřejmý.

LEMMA 3.1.5. *Jestliže* ∇ *má* wPCP*, pak platí následující:*

(C_∇) $\quad \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \nabla \varphi$

(I_∇) $\quad \varphi \nabla \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$

(A_∇) $\quad \varphi \nabla (\psi \nabla \chi) \dashv\vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \nabla \psi) \nabla \chi$

[1] Samozřejmě bychom mohli tyto vlastnosti definovat jako ekvivalenci: $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ právě tehdy, když $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Tato definice je například uvažována v [23] pod jménem *(slabá) vlastnost disjunkce*. Avšak implikace zprava doleva může být snadno nahrazena pomocí (PD) (jeden směr je zřejmý; pro druhý si uvědomme, že z $\varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \psi$ můžeme získat $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \psi$ a $\psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \psi$). Proto dáváme přednost naší definici, která odděluje zajímavý směr této ekvivalence od toho triviálního, o kterém můžeme vždy předpokládat, že platí.

[2] Z angl. (weak) proof by cases property. (Pozn. překladatele.)

Uvědomme si, co vlastnosti (C_∇), (I_∇), (A_∇) vlastně říkají ohledně maticových modelů: tyto vlastnosti zaručující komutativitu, idempotenci a asociativitu, co se týče náležení do filtrů v maticových modelech, ale nezaručují, že tyto vlastnosti platí pro disjunkci dvou libovolných prvků v dané matici. Řečí symbolů: pokud $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$, pak ($C_\nabla$) znamená, že pro každé $a, b \in A$ pokud $a \nabla^{\boldsymbol{A}} b \subseteq F$, pak také $b \nabla^{\boldsymbol{A}} a \subseteq F$; ale nutně neznamená (jak ukazuje následující příklad), že $a \nabla^{\boldsymbol{A}} b = b \nabla^{\boldsymbol{A}} a$, obdobně pro ostatní vlastnosti.

PŘÍKLAD 3.1.6. *„Nekomutativní“ protodisjunkce s* PCP. Uvažme Gödel-Dummettovu logiku G získanou přidáním axiomu $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ k intuicionistické logice IL. Je dobře známo (viz [20]), že tato logika je úplná vůči matici $\langle [0,1]_{\mathrm{G}}, \{1\}\rangle$, kde $[0,1]_{\mathrm{G}}$ je Heytingova algebra zavedená v příkladu 1.1.26. Dále uvažme její rozšíření $\mathrm{G}_\triangle$ v jazyce s přidanou unární spojkou $\triangle$, která je definovaná jako logika daná maticí $\langle [0,1]_{\mathrm{G}_\triangle}, \{1\}\rangle$, kde $[0,1]_{\mathrm{G}_\triangle}$ je algebra $[0,1]_{\mathrm{G}}$ obohacená o unární funkci, jejíž chování je dáno následovně: $\triangle(1) = 1$ a $\triangle(a) = 0$ pro každé $a < 1$. Zřejmě $\{p \vee q\}$ definuje protodisjunkci s PCP, kde vlastnosti (C_∇), (I_∇), (A_∇) platí dokonce po bodech. My však můžeme také uvažovat jinou protodisjunkci s PCP definovanou pomocí $\{\triangle p \vee q\}$ (všimněme si, že platí: $\triangle p \vee q \dashv\vdash_{\mathrm{G}_\triangle} p \vee q$). Tato protodisjunkce poskytuje protipříklad na platnost komutativity po bodech: $\triangle(0.5) \vee 0.3 = 0.3 \neq 0.5 = \triangle(0.3) \vee 0.5$.

Můžeme také ukázat, že obrácený směr v lemmatu 3.1.5 neplatí a že wPCP a PCP jsou vskutku odlišné vlastnosti:

PŘÍKLAD 3.1.7. *Finitární logika s protodisjunkcí splňující* (C_∇)*,* (I_∇)*,* (A_∇) *a zároveň nemající* wPCP. Je zřejmé, že svazová spojka $\vee$ splňuje v logice $\mathrm{FL_e}$ všechny tři podmínky.

Předpokládejme dále, že $\vee$ má wPCP. Z $\varphi \vdash \varphi \wedge \overline{1}$ snadno dostaneme $\varphi \vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \vee \psi$. Stejně tak bychom pro $\psi \vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \vee \psi$ užitím wPCP spojky $\vee$ bychom mohli získat $\varphi \vee \psi \vdash (\varphi \wedge \overline{1}) \vee \psi$. Uvažme $\mathrm{FL_e}$-model s nosičem $\{\bot, a, b, \overline{1}, \top\}$ a filtrem $\{\overline{1}, \top\}$; svazové spojky jsou definované tak, že prvky tvoří nedistributivní svaz $\boldsymbol{M}_3$ známý jako *diamant*; reziduovaná konjunkce je definována jako $x \,\&\, \overline{1} = \overline{1} \,\&\, x = x$ a $x \,\&\, y = x \wedge y$ pro $x, y \neq \overline{1}$ a implikace jako $x \to y = \max\{z \mid z \,\&\, x \leq y\}$. Snadným pozorováním získáme spor: $a \vee b = \top$, ale $(a \wedge \overline{1}) \vee b = \bot \vee b = b$.

PŘÍKLAD 3.1.8. *Finitární logika mající pouze* wPCP*, nikoli* PCP. Uvažme opět nedistributivní svaz *diamant* $\boldsymbol{M}_3 = \{\bot, a, b, t, \top\}$ (kde $\bot$ je minimum a $\top$ maximum), nyní vezměme logiku danou všemi maticemi s touto algebrou a libovolným svazovým filtrem (jelikož takových matic je konečně mnoho, je tato logika finitární dle tvrzení 1.1.23). Pozorujme, že pro každou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ platí: $\Gamma \vdash \varphi$ právě tehdy, když $\bigwedge e[\Gamma] \leq e(\varphi)$ pro každé $\boldsymbol{M}_3$-ohodnocení e. Z toho snadno plyne, že $\vee$ je protodisjunkce s wPCP. Nyní pro spor předpokládejme, že má také PCP. Pak z $\varphi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$ a $\chi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$ dostaneme $\varphi \vee \chi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$, a tedy také (opět aplikací PCP) $\varphi \vee \chi, \psi \vee \chi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$, což je v podstatě distributivita, a tak získáme spor pozorováním, že $a \vee b = t \vee b = \top$, zatímco $(a \wedge t) \vee b = \bot \vee b = b$.

Mohli bychom také ukázat nezávislost vlastností protodisjunkce (C_∇), (I_∇), (A_∇) užitím umělých, finitárních protipříkladů. To však ponecháme čtenáři za cvičení a pouze zmíníme přirozený způsob, jak získat příklady: každá extenze logiky $\mathrm{FL_e}$, která splňuje takzvaný zákon dvojí negace $\neg\neg\varphi \to \varphi$ a nesplňuje pravidlo kontrakce $\varphi \to (\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$ (jako například nekonečněhodnotová Łukasiewiczova logika definovaná v příkladě 1.3.11), má definovatelnou spojku $\oplus$: $\varphi \oplus \psi = \neg(\neg\varphi \,\&\, \neg\psi)$ (viz poznámka 5), která splňuje (PD), (C_∇), (A_∇), ale nesplňuje (I_∇).

Nyní zadefinujeme další přirozenou variantu vlastnosti důkazu po případech, která „leží mezi“ PCP a wPCP:

DEFINICE 3.1.9. *Říkáme, že p-protodisjunkce* ∇ *má* finitární vlastnost důkazu po případech *v logice* L*, když pro každou* konečnou *množinu formulí* Γ *a libovolné formule* φ, ψ, χ *máme:*

fPCP *Pokud* $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Snadno lze nahlédnout, že pro každou finitární logiku jsou vlastnosti PCP a fPCP ekvivalentní. Další přirozený způsob, jak získat vlastnosti obdobné PCP, spočívá v nahrazení φ a ψ množinami formulí. Pokud povolíme pouze konečné množiny, pak docílíme pouze reformulace PCP a fPCP:

LEMMA 3.1.10. *P-protodisjunkce* ∇ *má* (f)PCP *právě tehdy, když následující metapravidlo platí pro všechny (konečné) množiny formulí* $\Gamma \cup \{\chi\}$ *a všechny konečné množiny formulí* Φ, Ψ*:*

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \qquad \Gamma, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}{\Gamma, \Phi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}$$

Důkaz. Ukážeme důkaz pro případ PCP (důkaz pro fPCP je analogický). Jedna implikace platí triviálně; druhou implikaci dokážeme indukcí. Dvojici $\Gamma, \Phi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ budeme nazývat *situací*; *složitost* situace definujeme jako pár $\langle n, m\rangle$, kde n a m jsou kardinality množin $\Phi \setminus \Psi$ a $\Psi \setminus \Phi$. Použitím indukce přes $k = n + m$ ukážeme, že v každé situaci dostaneme: $\Gamma, \Phi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Jako první uvažme případ situace, kde $k \leq 2$. Pokud $n = 0$, tj. $\Phi \subseteq \Psi$, dostaneme $\Phi \nabla \Phi \subseteq \Phi \nabla \Psi$, a protože díky ($\mathrm{I}_\nabla$) máme $\Gamma, \Phi \nabla \Phi \vdash_{\mathrm{L}} \Gamma \cup \Phi$, jsme hotovi. Důkaz pro $m = 0$ je stejný. Pokud $n = m = 1$, použijeme PCP. Indukční krok: uvažme situaci se složitostí $\langle n, m\rangle$, kde $n + m > 2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $n \geq 2$, vezměme formuli $\varphi \in \Phi \setminus \Psi$ a definujme $\Phi'_1 = \Phi \setminus \{\varphi\}$. Víme, že $\Gamma, \Phi'_1, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Tedy také víme, že $\Gamma, \Phi'_1, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \Phi'_1, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$; všimněme si, že složitost této situace je $\langle 1, m\rangle$, a jelikož $1 + m < n + m$, můžeme použít indukční předpoklad a získat $\Gamma, \Phi'_1, \varphi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Tím dostaneme situaci $\Gamma, \varphi \nabla \Psi, \Phi'_1 \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ a $\Gamma, \varphi \nabla \Psi, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ (druhá část je triviální); složitost této situace je $\langle n', m'\rangle$, kde $n' \leq n - 1$ a $m' \leq m$, a tedy opět můžeme použít indukční předpoklad a obdržet požadované tvrzení $\Gamma, \varphi \nabla \Psi, \Phi'_1 \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. □

Všimněme si, že pokud logika L je finitární, pak předchozí lemma platí i bez požadavku, aby množiny Φ a Ψ byly konečné. Na druhou stranu pro infinitární logiky dává smysl uvažovat tuto vlastnost jako další („nejsilnější“) variantu vlastnosti důkazu po případech:

DEFINICE 3.1.11. *Říkáme, že p-protodisjunkce* ∇ *má* silnou vlastnost důkazu po případech *v logice* L*, pokud pro všechny množiny formulí* Γ, Φ, Ψ *a pro každou formuli* χ *máme:*

sPCP *Když* $\Gamma, \Phi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\Gamma, \Phi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Je zřejmé, že sPCP implikuje PCP a pro finitární logiky tyto vlastnosti splývají (viz komentář před definicí). Na druhou stranu můžeme ukázat, že ačkoli existují přirozené infinitární logiky, které mají sPCP (viz příklad 3.2.20), přesto tato vlastnost v obecném případě *není* důsledkem vlastnosti PCP, jak ukážeme na následujícím příkladu:

PŘÍKLAD 3.1.12. *Infinitární slabě implikativní logika s protodisjunkcí splňující* PCP *a zároveň nesplňující* sPCP. Nechť $\boldsymbol{A}$ je úplná Heytingova algebra, která není duálním rámcem, tzn. existují prvky $x_i \in A$ pro $i \geq 0$ takové, že

$$\bigwedge_{i \geq 1} (x_0 \vee x_i) \not\leq x_0 \vee \bigwedge_{i \geq 1} x_i.$$

Rozšíříme jazyk algebry $\boldsymbol{A}$ o konstanty $\{c_i \mid i \geq 0\} \cup \{c\}$ a definujeme algebru $\boldsymbol{A}'$ v tomto jazyce zvolením: $c_i^{\boldsymbol{A}'} = x_i$ a $c = \bigwedge_{i \geq 1} x_i$. Pak sémanticky definujeme logiku L v tomto jazyce užitím následující třídy matic $\{\langle \boldsymbol{A}', F\rangle \mid F$ je hlavní svazový filtr na $\boldsymbol{A}\}$. Lze snadno nahlédnout, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{A}'$-ohodnocení e platí: $\bigwedge_{\psi \in \Gamma} e(\psi) \leq e(\varphi)$ (jeden směr: jelikož hlavní svazový filtr generovaný $\bigwedge_{\psi \in \Gamma} e(\psi)$ zřejmě obsahuje $e[\Gamma]$, obsahuje také $e(\varphi)$; opačný směr: stačí si všimnout, že každý hlavní svazový filtr obsahující $e[\Gamma]$ musí také obsahovat $\bigwedge_{\psi \in \Gamma} e(\psi)$, a tedy také $e(\varphi)$).

Dále ukážeme, že $\vee$ má PCP: předpokládejme, že pro každé ohodnocení e platí

$$(\bigwedge_{\delta \in \Gamma} e(\delta)) \wedge e(\varphi) \leq e(\chi) \quad \text{a} \quad (\bigwedge_{\delta \in \Gamma} e(\delta)) \wedge e(\psi) \leq e(\chi),$$

tedy $[(\bigwedge_{\delta \in \Gamma} e(\delta)) \wedge e(\varphi)] \vee [(\bigwedge_{\delta \in \Gamma} e(\delta)) \wedge e(\psi)] \leq e(\chi)$, zbytek plyne z distributivity algebry $\boldsymbol{A}$. Nakonec pro spor předpokládejme, že $\vee$ má také sPCP. Jelikož očividně: $c_0 \vdash_{\mathrm{L}} c_0 \vee c$ a $\{c_i \mid i \geq 1\} \vdash_{\mathrm{L}} c_0 \vee c$, tak užitím sPCP dostaneme $\{c_0 \vee c_i \mid i \geq 1\} \vdash_{\mathrm{L}} c_0 \vee c$, což je spor s $\bigwedge_{i \geq 1}(x_0 \vee x_i) \nleq x_0 \vee \bigwedge_{i \geq 1} x_i$.

Silnou a finitární vlastnost důkazu po případech lze zavést jako formální zobecnění wPCP:

TVRZENÍ 3.1.13. *P-protodisjunkce* ∇ *má* sPCP *(resp.* fPCP*) právě tehdy, když následující metapravidlo platí pro každou množinu (resp. každou konečnou množinu) formulí* $\Phi \cup \Psi \cup \{\chi\}$*:*

$$\frac{\Phi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \qquad \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}{\Phi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}.$$

Důkaz. Směr zleva doprava je snadný (triviální v případě sPCP a lze ho snadno dokázat pomocí lemmatu 3.1.10 také pro fPCP). Druhý směr je přímým důsledkem (PD). □

Shrnutí: Kombinováním omezení kardinality kontextových množin a kardinality disjunktů máme nejvýše čtyři následující vlastnosti důkazu po případech (v pořadí od nejslabší): wPCP, fPCP, PCP a sPCP. S výjimkou dvojice fPCP a PCP víme, že se jedná o různé vlastnosti (příklad 3.1.8 ve skutečnosti poskytuje finitární logiku oddělující wPCP od fPCP). Navíc víme, že poslední tři jsou ekvivalentní pro finitární logiky. V dalších sekcích této kapitoly se budeme zabývat charakterizací těchto čtyř vlastností v obecném kontextu, dále budeme hledat další podmínky, při jejichž splnění (některé) tyto vlastnosti splývají.

Připomeňme si poznámku 1, v níž jsme představili, že každá p-protodisjunkce splňuje i „obrácený" směr implikace v definici vlastnosti důkazu po případech, toto pozorování nám umožní formulovat různé verze vlastnosti důkazu po případech v kompaktnější podobě jakožto takzvané podmínky Tarského stylu. Konkrétně pro každou p-protodisjunkci ∇ platí:

$$\begin{aligned}
\text{wPCP} \;&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi \nabla \psi) \text{ pro všechny } \varphi, \psi.\\[6pt]
\text{fPCP} \;&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi \nabla \Psi) \text{ pro všechny konečné } \Phi, \Psi\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi \nabla \Psi) \text{ pro všechny konečné } \Gamma, \Phi, \Psi\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi \nabla \psi) \text{ pro každou konečnou } \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}.\\[6pt]
\text{PCP} \;&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi \nabla \Psi) \text{ pro každou } \Gamma \text{ a konečné } \Phi, \Psi\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \varphi \nabla \psi) \text{ pro každou } \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}.\\[6pt]
\text{sPCP} \;&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi \nabla \Psi) \text{ pro všechny } \Phi, \Psi\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, \Phi \nabla \Psi) \text{ pro všechny } \Gamma, \Phi, \Psi.
\end{aligned}$$

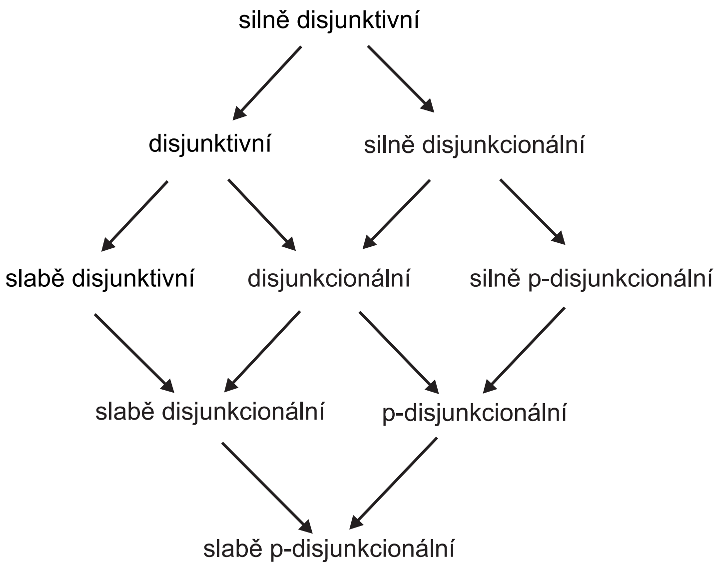
Řekneme, že logika L má *přenesenou* (slabou/silnou) vlastnost důkazu po případech, pokud výše zmíněné definice platí nejen pro algebru formulí a uzávěrový operátor Th_{L}, ale i pro libovolnou algebru $\boldsymbol{A}$ a příslušný uzávěrový operátor $\mathrm{Fi}_{\mathrm{L}}^{\boldsymbol{A}}$.

Jak jsme již argumentovali výše, vlastnost důkazu po případech je odůvodněně nejcharakterističtější vlastností, kterou by disjunkce měla mít. Proto můžeme využít (různých variant) této vlastnosti k formální definici různých pojmů disjunkce. Jelikož máme celkem čtyři varianty, mohli bychom zadefinovat čtyři odpovídající pojmy disjunkce. Vynecháme pouze definici disjunkce odpovídající fPCP, protože tato vlastnost bude v následujícím textu hrát pouze skromnou úlohu. Z lemmatu 3.1.4 víme, že všechny množiny ∇ splňující wPCP jsou vzájemně odvoditelné, a tak díky faktu, že analogické tvrzení platí i pro PCP nebo sPCP, dává smysl definovat třídy logik podle přítomnosti p-protodisjunkce splňující odpovídající variantu vlastnosti důkazu po případech. Tyto třídy budeme dále dělit podle struktury množin ∇, tj. odlišíme tradiční disjunkci definovanou pomocí jedné binární spojky (primitivní nebo definované), disjunkci definovanou z (potencionálně nekonečné) množiny ∇ bez parametrů a nakonec v nejobecnějším případě disjunkci, kde ∇ může být nekonečná a obsahovat parametry.

DEFINICE 3.1.14 (p-disjunkce, disjunkce). *Říkáme, že p-protodisjunkce* ∇ *je* silná p-disjunkce *(resp.* p-disjunkce*, resp.* slabá p-disjunkce*), pokud splňuje* sPCP *(resp.* PCP*, resp.* wPCP*). Pokud* ∇ *neobsahuje žádné parametry, pak vynecháme prefix „p-“.*

DEFINICE 3.1.15 (p-disjunkcionální logika, disjunkcionální logika, disjunktivní logika). *Logiku* L *nazýváme* silně (p-)disjunkcionální*, pokud má silnou (p-)disjunkci. Analogicky definujeme disjunkcionální a slabě disjunkcionální logiky. Pokud je odpovídající silná p-disjunkce konečná, pak logiku nazýváme konečně silně p-disjunkcionální (obdobně také pro ostatní případy). Nakonec je-li silná disjunkce dána pouze jednou formulí bez parametrů, pak mluvíme o silně disjunktivní logice (obdobně pro ostatní případy).*

VĚTA 3.1.16. *Všechny třídy logik definované v předchozí definici jsou vzájemně odlišné. Relace subsumce těchto tříd je popsána následujícím schématem:*



Navíc průnik libovolných dvou tříd je jejich infimum vzhledem k této relaci.

Vlastnost průniku je důsledkem lemmatu 3.1.4, ze kterého plyne, že v (silně) p-disjunkcionální logice je každá slabá p-disjunkce dokonce (silnou) p-disjunkcí. Vzájemnou odlišnost daných tříd ukážeme na sérii následujících příkladů. Tyto příklady také ukážou, že v rámci finitárních logik (kde jsou vlastnosti PCP a sPCP ekvivalentní) existuje přesně šest vzájemně rozdílných tříd.

PŘÍKLAD 3.1.17. *Finitární slabě disjunktivní logika, která není p-disjunkcionální.* Logika uvedená v příkladu 3.1.8 založená na svazu $\boldsymbol{M}_3$ má spojku $\vee$ splňující wPCP a zároveň nesplňující PCP. Tato logika je tedy podle definice slabě disjunktivní. Kdyby ovšem měla nějakou p-disjunkci ∇, pak by podle lemmatu 3.1.4 byly ∇ a $\vee$ navzájem odvoditelné, tedy $\vee$ by také splňovala PCP, což víme, že není pravda.

PŘÍKLAD 3.1.18. *Infinitární disjunktivní slabě implikativní logika, která není silně p-disjunkcionální.* Logika z příkladu 3.1.12 postavená na úplné Heytingově algebře, která není duálním rámcem, má spojku $\vee$ splňující PCP a zároveň nesplňující sPCP. Jedná se tedy o disjunktivní logiku a úvahou podobnou jako v minulém příkladě dojdeme k závěru, že tato logika není silně p-disjunkcionální.

PŘÍKLAD 3.1.19. *Finitární (silně) disjunkcionální logika, která není slabě disjunktivní.* Uvažujme axiomatickou extenzi logiky BCKW (tj. implikačního fragmentu intuicionistické logiky IL, viz příklad 1.1.16) o axiom $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$ a výslednou logiku označme $\mathrm{G}_\to$, dá se totiž dokázat, že se jedná o implikační fragment Gödel-Dummettovy logiky, viz příklad 3.1.6. Jako první ukážeme, že množina

$$\varphi \nabla \psi = \{(\varphi \to \psi) \to \psi, (\psi \to \varphi) \to \varphi\}$$

je disjunkce. Protože IL je axiomatická extenze $\mathrm{FL_{ew}}$, tak očividně platí: $\varphi \vdash_{\mathrm{G}_\to} (\varphi \to \psi) \to \psi$ a také $\psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} (\varphi \to \psi) \to \psi$, a tedy ∇ je protodisjunkce. Pro důkaz, že ∇ splňuje PCP, předpokládejme, že $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{G}_\to} \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} \chi$. Jelikož díky (MP) víme, že $\Gamma, \varphi \to \psi, \varphi\nabla\psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} \psi$, tak také $\Gamma, \varphi \to \psi, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} \chi$. Dále z věty o dedukci (je zřejmé, že $\mathrm{G}_\to$ je (MP)-založená extenze BCKW, a tedy lze užít větu 2.2.11) dostaneme $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} (\varphi \to \psi) \to \chi$. Obdobně také dokážeme: $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} (\psi \to \varphi) \to \chi$, a tedy, užitím přidaného axiomu, dostaneme $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{G}_\to} \chi$.

Nyní předpokládejme, že existuje formule $\varphi(p, q)$ bez parametrů mající wPCP. Víme, že logika G je úplná vůči matici $\langle [0,1]_{\mathrm{G}}, \{1\}\rangle$, kde $[0,1]_{\mathrm{G}}$ je Heytingova algebra zavedená v příkladu 1.1.26, a jelikož $\mathrm{G}_\to$ je její implikační fragment, tak $\mathrm{G}_\to$ je úplná vzhledem k matici $\langle \boldsymbol{A}, \{1\}\rangle$, kde $\boldsymbol{A}$ je implikační redukt algebry $[0,1]_{\mathrm{G}}$, tj. algebra, jejíž univerzum je jednotkový interval reálných čísel $[0,1]$ a jejíž jediná operace $\to$ je interpretována následovně:

$$a \to^{\boldsymbol{A}} b = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \leq b, \\ b & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podle lemmatu 3.1.4 jsou formule $\varphi(p, q)$ a množina $p \nabla q$ vzájemně odvoditelné v $\mathrm{G}_\to$, a tudíž i v G. Víme, že $p \vee q \leftrightarrow ((p \to q) \to q) \wedge ((q \to p) \to p)$ platí v Gödel-Dummettově logice, a tedy užitím věty o dedukci víme, že $\varphi(p, q) \leftrightarrow p \vee q$, tj. pro každé $a, b \in [0, 1)$ máme $\varphi^{\boldsymbol{A}}(a, b) = \max\{a, b\}$. Využijeme argumentaci nekonečným sestupem, abychom ukázali, že to není možné. Jelikož $\to$ je jediná spojka v jazyce, musí platit: $\varphi(p, q) = \alpha(p, q) \to \beta(p, q)$. Uvažme libovolné $a, b \in [0, 1)$. V případě, že $a \leq b$, platí $\varphi^{\boldsymbol{A}}(a, b) = \alpha^{\boldsymbol{A}}(a, b) \to^{\boldsymbol{A}} \beta^{\boldsymbol{A}}(a, b) = b$, což znamená $\beta^{\boldsymbol{A}}(a, b) = b$. Obdobně, pokud $a > b$, platí: $\beta^{\boldsymbol{A}}(a, b) = a$. Tedy $\beta(p, q)$ by byla striktně kratší formule splňující tu samou podmínku. Pokračováním v této úvaze bychom došli závěru, že pro každé $a, b \in [0, 1)$ platí buď $a \to^{\boldsymbol{A}} b = \max\{a, b\}$, anebo $b \to^{\boldsymbol{A}} a = \max\{a, b\}$; spor.[3]

Na závěr ukážeme příklad, který potvrdí potřebu parametrů v nejobecnější definici p-disjunkce, tj. potvrdíme nutnost námi zvoleného stupně obecnosti.

PŘÍKLAD 3.1.20. *Finitární (silně) p-disjunkcionální logika, která není slabě disjunkcionální.* Uvažme opět logiku BCKW. Nejprve ukážeme, že formule

$$\nabla(p, q, r) = (p \to r) \to ((q \to r) \to r)$$

je p-disjunkce. Předpokládejme, že $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash \chi$, z věty o dedukci (viz věta 2.2.11) pak platí: $\Gamma \vdash \varphi \to \chi$ a $\Gamma \vdash \psi \to \chi$. Protože $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi) \in \varphi \nabla \psi$, snadno dostaneme: $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash \chi$.

Dále, abychom získali spor, předpokládejme, že existuje nějaká množina ∇', která je disjunkce v BCKW. Tedy (podle věty 3.3.1) je to také disjunkce v plné intuicionistické logice IL. Protože (jak plyne z věty 2.2.12) také svazová spojka $\vee$ je disjunkce v IL, tedy dle lemmatu 3.1.4 platí: $p \nabla q \dashv\vdash_{\mathrm{IL}} p \vee q$. Využitím finitarity, přítomnosti svazové konjunkce $\wedge$ v jazyce IL a věty o dedukci dostaneme formuli $\vee'$ se dvěma proměnnými p, q sestavenou pouze z implikace a svazové konjunkce takovou, že $\vdash_{\mathrm{IL}} p \vee' q \leftrightarrow p \vee q$, což ale není možné (viz např. [37]).

Další příklady finitárních logik (tentokrát přirozených) s parametrizovanou nekonečnou disjunkcí jsou logiky SL a FL (viz věta 2.2.12), ačkoli v těchto případech se nám nepodařilo dokázat, že se nejedná o logiku slabě disjunkcionální.

Na závěr této sekce se omezíme na slabě implikativní logiky a definujeme poslední třídu logik vymezenou vlastností disjunkce.

DEFINICE 3.1.21 (Svazovědisjunktivní logika). *Nechť* L *je slabě implikativní disjunktivní logika* L *s principální implikací* $\to$ *a (slabou/silnou) disjunkcí* $\vee$. *Řekneme, že* L *je* (slabě/silně) svazovědisjunktivní *pokud:*

($\vee$1) $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \varphi \vee \psi$,

($\vee$2) $\vdash_{\mathrm{L}} \psi \to \varphi \vee \psi$,

($\vee$3) $\varphi \to \chi, \psi \to \chi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \vee \psi \to \chi$.

Tento název je zvolen z následujícího důvodu: pro každou takovou logiku L a redukovanou matici $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ je $\langle A, \vee^{\boldsymbol{A}} \rangle$ spojovým polosvazem s polosvazovým uspořádáním $\leq_{\mathbf{A}}$.

Poznamenejme, že pokud logika L splňuje podmínky ($\vee$1)–($\vee$3) pro dvě různé (primitivní nebo odvozené) spojky $\vee$ a $\vee'$, pak můžeme přímočaře dokázat silnější verzi lemmatu 3.1.4: $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \vee \psi \leftrightarrow \varphi \vee' \psi$. Příkladem 3.1.7 jsme tedy ukázali, že $\mathrm{FL_e}$ není slabě svazovědisjunktivní.

LEMMA 3.1.22. *Každá* (MP)*-založená Rasiowa-implikativní logika s & a* $\overline{1}$ *v jazyce (např. každé axiomatické rozšíření* $\mathrm{FL_{ew}}$*) je svazovědisjunktivní logika.*

Důkaz. Fakt, že v těchto logikách splňuje svazová spojka $\vee$ vlastnost PCP, plyne z věty 2.2.12. □

[3] Pro pohodlí čtenáře jsme uvedli tento elementární důkaz, že $\mathrm{G}_{\to}$ není slabě disjunkcionální. Mohli bychom také ale argumentovat podobně jako v následujícím příkladě.

3.2 Charakterizace vlastností důkazu po případech

Pro tuto sekci si zafixujme logiku L v jazyce $\mathcal{L}$ a p-protodisjunkci ∇ v L. Začneme charakterizací slabě (p)-disjunkcionálních logik, zde nám jako prostředek poslouží pojem substituce.

VĚTA 3.2.1 (Charakterizace slabě (p)-disjunkcionálních logik). *Následující je ekvivalentní:*

1. L *je slabě (p)-disjunkcionální,*
2. *pro každou (surjektivní) substituci σ a každou dvojici formulí φ, ψ platí:*
$$\mathrm{Th_L}(\sigma\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma\psi) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)]),$$
3. *pro každou (surjektivní) substituci σ a každou dvojici různých proměnných p, q platí:*
$$\mathrm{Th_L}(\sigma p) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma q) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)]).$$

Důkaz. Nejprve si všimněme, že když je ∇ bez parametrů nebo je substituce σ surjektivní, tak platí $\sigma\varphi \nabla \sigma\psi = \sigma[\varphi \nabla \psi]$: v prvním případě je tvrzení triviální, ve druhém případě můžeme argumentovat tímto řetězcem rovností: $\sigma\varphi\nabla\sigma\psi = \{\delta(\sigma\varphi, \sigma\psi, \overrightarrow{\alpha}) \mid \delta(p, q, \vec{r}) \in \nabla \text{ a } \overrightarrow{\alpha} \in Fm_{\mathcal{L}}\} = \{\delta(\sigma\varphi, \sigma\psi, \overrightarrow{\sigma\beta}) \mid \delta(p, q, \vec{r}) \in \nabla \text{ a } \overrightarrow{\beta} \in Fm_{\mathcal{L}}\} = \sigma[\varphi \nabla \psi]$.

Nyní ukážeme, že z 1 plyne 2: pro libovolnou slabou (p)-disjunkci ∇ můžeme psát následující řetězec rovností a inkluzí (první a poslední rovnost platí díky wPCP): $\mathrm{Th_L}(\sigma\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma\psi) = \mathrm{Th_L}(\sigma\varphi \nabla \sigma\psi) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\varphi \nabla \psi]) \subseteq \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi \nabla \psi)]) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)])$. Opačná inkluze platí v každé logice: vždy totiž platí $\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)] \subseteq \sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi)] \subseteq \mathrm{Th_L}(\sigma\varphi)$, a tak $\mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)]) \subseteq \mathrm{Th_L}(\sigma\varphi)$. Jelikož analogicky platí $\mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)]) \subseteq \mathrm{Th_L}(\sigma\psi)$, dostaneme $\mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi)]) \subseteq \mathrm{Th_L}(\sigma\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma\psi)$.

Triviálně 2 implikuje 3; nyní ukážeme, že 3 implikuje 1. Prvně předpokládejme, že 3 platí pro všechny surjektivní substituce. Definujeme $\nabla(p, q, \overrightarrow{\alpha}) = \mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)$. Očividně platí, že ∇ je p-protodisjunkce; dále ukážeme, že ∇ také splňuje wPCP. Uvažme libovolnou surjektivní substituci takovou, že: $\sigma p = \varphi$ a $\sigma q = \psi$. Můžeme tedy napsat tento řetězec rovností: $\mathrm{Th_L}(\varphi) \cap \mathrm{Th_L}(\psi) = \mathrm{Th_L}(\sigma p) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma q) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)]) = \mathrm{Th_L}(\sigma[p \nabla q]) = \mathrm{Th_L}(\varphi \nabla \psi)$.

Na závěr předpokládejme, že 3 platí pro všechny substituce. Vezměme substituci σ takovou, že $\sigma p = p$ a $\sigma r = q$ pro každé $r \neq p$. Definujeme $\nabla(p, q) = \sigma[\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)]$. Pak ∇, jak lze snadno ověřit, je protodisjunkce a obdobně jako v předchozím případě lze ověřit, že má také wPCP. $\square$

Poznamenejme, že z důkazu minulé věty lze vyvodit, že pokud L je slabě p-disjunkcionální logika, pak $\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)$ je jedna z jejích p-disjunkcí. Jedná se ve skutečnosti o největší slabou p-disjunkci (zapsanou proměnnými p a q) ve smyslu inkluze.

Dále definujeme pro každou konsekuci její takzvanou ∇-formu. Tento pojem použijeme nejen k důkazu následující charakterizační věty 3.2.4, ale bude hrát důležitou roli v důkazech a formulacích následujících vět nejen v této, ale i v příští kapitole.

DEFINICE 3.2.2 (∇-forma). *Nechť $R = \Gamma \rhd \varphi$ je $\mathcal{L}$-konsekuce. Pak jako R^∇ značíme množinu konsekucí* $\{\Gamma \nabla \chi \rhd \delta \mid \chi \in Fm_{\mathcal{L}} \text{ a } \delta \in \varphi \nabla \chi\}$.

LEMMA 3.2.3. *Nechť R je konsekuce taková, že $R^{\nabla} \subseteq$ L.*

1. *Pokud ∇ splňuje* (I_{∇})*, pak $R \in$ L.*
2. *Pokud ∇ splňuje* (A_{∇})*, pak $(R^{\nabla})^{\nabla} \subseteq$ L.*

Důkaz. První tvrzení: z předpokladu víme $\Gamma \nabla \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \varphi$, zbytek plyne z (PD) a (I_{∇}). Abychom dokázali druhé tvrzení, začneme s $\Gamma \nabla (\psi_1 \nabla \psi_2) \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla (\psi_1 \nabla \psi_2)$; důkaz zakončíme opakovaným užitím (A_{∇}). □

První část tohoto lemmatu nám říká, že bychom v následující větě místo „$R^{\nabla} \subseteq$ L pro každou $R \in$ L“ mohli psát „$R^{\nabla} \subseteq$ L právě tehdy, když $R \in$ L“. Druhá část bude užitečná později.

VĚTA 3.2.4 (Syntaktická charakterizace). *P-protodisjunkce ∇ má vlastnost*

1. sPCP *právě tehdy, když ∇ splňuje* (C_{∇}), (I_{∇})*, a navíc $R^{\nabla} \subseteq$ L pro každou konsekuci $R \in$ L,*
2. fPCP *právě tehdy, když ∇ splňuje* (C_{∇}), (I_{∇})*, a navíc $R^{\nabla} \subseteq$ L pro každou finitární konsekuci $R \in$ L,*
3. wPCP *právě tehdy, když ∇ splňuje* (C_{∇}), (I_{∇})*, a navíc $(\varphi \rhd \psi)^{\nabla} \subseteq$ L, kdykoli $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$.*

Důkaz. Jako první ukážeme současně všechny implikace zleva doprava. Z $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ dostaneme $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \chi$ užitím (PD). Užitím (PD) také dostaneme $\chi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \chi$. A tedy z sPCP (pro libovolnou množinu Γ), fPCP (pro konečnou Γ) a z wPCP (pro $\Gamma = \{\psi\}$) dostaneme $\Gamma \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \nabla \chi$.

Druhý směr ukážeme pro sPCP, ostatní případy jsou obdobné. Z předpokladu $\Gamma, \Phi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ získáme $\Gamma \nabla \psi, \Phi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \nabla \psi$ pro každou formuli $\psi \in \Psi$, z čehož díky (C_{∇}), (PD) a faktu $\Phi \nabla \psi \subseteq \Phi \nabla \Psi$ dostaneme $\Gamma, \Phi \nabla \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \Psi \nabla \chi$. Z předpokladu $\Gamma, \Psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ dostaneme $\Gamma \nabla \chi, \Psi \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \nabla \chi$, z čehož díky ($I_{\nabla}$) a (PD) dostaneme $\Gamma, \Psi \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$. Zbytek důkazu je zřejmý. □

V příkladu 3.1.7 jsme viděli spojku $\vee$, která splňuje (PD), (C_{∇}), (I_{∇}) a (A_{∇}), ale není disjunkcí. Podmínka $R^{\nabla} \subseteq$ L pro každou $R \in$ L je tedy nutná (abychom ukázali, že $\vee$ není slabá disjunkce, dokázali jsme vlastně, že $\vee$-forma pravidla (adj_u) neplatí v $\mathrm{FL_e}$).

Následující tvrzení ukazuje, že abychom dokázali, že ∇ má sPCP, stačí ověřit, že logika L je uzavřena na ∇-formy prvků její libovolné prezentace.

TVRZENÍ 3.2.5. *Nechť $\mathcal{AS}$ je prezentace logiky* L*. Pak ∇ má* sPCP *právě tehdy, když ∇ splňuje* (C_{∇}), (I_{∇}) *a $R^{\nabla} \subseteq$ L pro každou $R \in \mathcal{AS}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, ukážeme: $\Gamma \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}} \delta \nabla \chi$ pro každou formuli χ a každou formuli δ, která se objeví v důkazu φ z Γ. Pokud $\delta \in \Gamma$ nebo je δ axiom, je důkaz triviální. Nyní předpokládejme, že $R = \Gamma' \rhd \delta$ je odvozovací pravidlo, které použijeme k odvození δ (to lze předpokládat, protože axiomatické systémy jsou uzavřeny na substituce). Z indukčního předpokladu máme: $\Gamma \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}} \Gamma' \nabla \chi$. Zbytek plyne, protože $R^{\nabla} \in$ L. □

Dále využijeme této naší syntaktické charakterizace sPCP k důkazu zásadní věty o přenosu této vlastnosti.

VĚTA 3.2.6 (Přenos sPCP). *Pokud má p-protodisjunkce ∇ vlastnost* sPCP*, pak pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ a všechny $X, Y \subseteq A$ platí:*

$$\mathrm{Fi}(X) \cap \mathrm{Fi}(Y) = \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} Y).$$

Důkaz. Inkluze $\mathrm{Fi}(X\nabla^{\boldsymbol{A}} Y) \subseteq \mathrm{Fi}(X) \cap \mathrm{Fi}(Y)$ je snadným důsledkem (PD). Vezmeme-li libovolné $\delta(p,q,\vec{r}) \in \nabla$, pak víme $p \vdash_{\mathrm{L}} \delta(p,q,\vec{r})$, a tedy také $\delta^{\boldsymbol{A}}(x,y,\vec{a}) \in \mathrm{Fi}(x)$ pro všechna $x,y,\vec{a} \in A$, takže $X \nabla^{\boldsymbol{A}} Y \subseteq \mathrm{Fi}(X)$, zbytek je snadný. Důkaz druhé inkluze začneme tím, že ukážeme, že pro každé $x \in \mathrm{Fi}(X)$ a každé $y \in A$ máme: $x \nabla^{\boldsymbol{A}} y \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$. Díky tvrzení 1.1.29 víme, že pokud $x \in \mathrm{Fi}(X)$, pak existuje důkaz x z X v nějaké prezentaci $\mathcal{AS}$ logiky L. Ukážeme, že pro každý uzel tohoto důkazu platí $z \nabla^{\boldsymbol{A}} y \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$, kde z je prvek označující daný uzel, tj. pro každou $\chi(p,q,\vec{r}) \in \nabla$ a každou posloupnost $\vec{u}$ prvků z A platí $\chi^{\boldsymbol{A}}(z,y,\vec{u}) \in \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$.

Případ listů je triviální (z je buď prvek X, anebo hodnotou nějakého axiomu v nějakém ohodnocení). Jinak existuje neprázdná množina Z prvků označujících předcházející uzly, konsekuce $\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{AS}$ a ohodnocení h takové, že $h[\Gamma] = Z$ a $h(\varphi) = z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že proměnné $q, r_1, \ldots, r_n$ se v $\Gamma \cup \{\varphi\}$ nevyskytují [4], a tedy můžeme zvolit $h(q) = y$ a $h(r_i) = u_i$ pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$. Tedy $h[\Gamma \nabla q] \subseteq Z \nabla^{\boldsymbol{A}} y \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$ (poslední inkluze platí díky indukčnímu předpokladu). Z charakterizace sPCP ve větě 3.2.4 dostaneme, že $\Gamma \nabla q \vdash_{\mathrm{L}} \chi(\varphi,q,r_1,\ldots,r_n)$, a tedy $\chi^{\boldsymbol{A}}(z,y,u_1,\ldots,u_n) = h(\chi(\varphi,q,r_1,\ldots,r_n)) \in \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$.

Nyní konečně můžeme ukázat, že $\mathrm{Fi}(X) \cap \mathrm{Fi}(Y) \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} Y)$. Pokud $z \in \mathrm{Fi}(X)$, pak díky právě ukázanému faktu pro každé $y \in Y$ platí: $z \nabla^{\boldsymbol{A}} y \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$, a tak (díky ($\mathrm{C}_\nabla$)) $y \nabla^{\boldsymbol{A}} z \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} y)$. To lze zkráceně napsat jako: $Y \nabla^{\boldsymbol{A}} z \subseteq \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} Y)$. Obdobně dostaneme $z \nabla^{\boldsymbol{A}} z \subseteq \mathrm{Fi}(Y \nabla^{\boldsymbol{A}} z)$ z $z \in \mathrm{Fi}(Y)$. Tedy $z \in \mathrm{Fi}(Y \nabla^{\boldsymbol{A}} z)$ (díky (I_∇)), a tak $z \in \mathrm{Fi}(X \nabla^{\boldsymbol{A}} Y)$. □

Dříve, než budeme moci dokázat větu o sémantické charakterizaci, musíme zavést několik dalších pojmů. Připomeňme, že množinu $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ můžeme uvažovat jako nosič úplného svazu, kde infimum je průnik a supremum je nejmenší filtr obsahující sjednocení.

DEFINICE 3.2.7. *Říkáme, že logika* L *je* filtrovědistributivní*, pokud pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ je svaz $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ distributivní. Dále říkáme, že logika* L *je* filtrověrámcová*, pokud pro každou $\mathcal{L}$-algebru je svaz $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ rámec, tj. pro každé $\mathcal{F} \cup \{G\} \subseteq \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ platí:*

$$G \cap \bigvee_{F \in \mathcal{F}} F = \bigvee_{F \in \mathcal{F}} (G \cap F).$$

Prefix „filtrově“ vynecháváme, pokud danou vlastnost uvažujeme pro $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$.

LEMMA 3.2.8. *Nechť* L *je slabě implikativní logika taková, že pro každou teorii T a každou dvojici formulí φ, ψ platí následující:*

$$(T \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi)) \cap (T \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = T \vee (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)),$$

pak je L *p-disjunkcionální.*

Důkaz. Použijeme větu 3.2.1, abychom ukázali, že L má slabou p-disjunkci ∇. Dále se pak snadno ukáže, že z našeho předpokladu plyne, že ∇ má také PCP:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T,\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T,\psi) &= (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T) \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi)) \cap (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T) \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = \\
&= \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T) \vee (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = \\
&= \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T) \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi \nabla \psi) = \\
&= \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T, \varphi \nabla \psi)
\end{aligned}$$

[4] Mohli bychom zadefinovat novou vhodnou $\Gamma \rhd \varphi$ se stejnou vlastností využitím argumentace ve stylu Hilbertova hotelu: Uvažme libovolnou enumeraci proměnných takovou, že $p_0 = q$, $p_i = r_i$, substituci $\sigma(p_i) = p_{i+n+1}$ a ohodnocení h' takové, že $h'(\sigma p) = h(p)$. Pak $\sigma[\Gamma] \rhd \sigma\varphi \in \mathcal{AS}$, $h'[\sigma[\Gamma]] = Z$ a $h'(\sigma\varphi) = z$. Všimněme si, že jsme využili faktu, že axiomatické systémy jsou uzavřeny na substituci.

Nyní tedy zbývá ukázat, že pro každou surjektivní substituci σ a každou dvojici různých proměnných p, q máme: $\mathrm{Th_L}(\sigma p) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma q) = \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)])$. Definujme teorii $Y = \sigma^{-1}[\mathrm{Th_L}(\emptyset)]$ a zobrazení $\boldsymbol{\sigma}$ jako $\boldsymbol{\sigma}(T) = \sigma[T]$ pro každé $T \in \{G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \mid Y \subseteq G\}$. Připomeňme, že podsvaz $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ s tímto nosičem značíme $[Y, Fm_{\mathcal{L}}]$.

Tvrzení 1: $\boldsymbol{\sigma}$ je izomorfismus mezi $[Y, Fm_{\mathcal{L}}]$ a Th(L). Je zřejmé, že σ je striktní surjektivní svazový homomorfismus $\langle Fm_{\mathcal{L}}, Y\rangle$ na $\langle Fm_{\mathcal{L}}, \mathrm{Th_L}(\emptyset)\rangle$, a tudíž tvrzení 1 plyne z tvrzení 1.3.15.

Tvrzení 2: $\mathrm{Th_L}(\sigma[\Sigma]) = \boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(\Sigma))$ *pro každou množinu formulí* Σ. První inkluze plyne z $\sigma[\Sigma] \subseteq \boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(\Sigma))$ a faktu, že $\boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(\Sigma)) \in \mathrm{Th(L)}$ díky tvrzení 1. Druhá inkluze: když $\chi \in \boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(\Sigma)) = \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{Th_L}(Y \cup \Sigma))$, pak $\chi = \sigma\delta$ pro δ takové, že $Y, \Sigma \vdash_{\mathrm{L}} \delta$. Tedy $\sigma[Y], \sigma[\Sigma] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma(\delta)$, a jelikož $\sigma[Y] = \mathrm{Th_L}(\emptyset)$, dostaneme $\sigma[\Sigma] \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Nyní můžeme důkaz zakončit následující sérií rovnic (užijeme tvrzení 2, tvrzení 1, předpoklad lemmatu a ještě jednou tvrzení 2):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Th_L}(\sigma p) \cap \mathrm{Th_L}(\sigma q) &= \boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(p)) \cap \boldsymbol{\sigma}(Y \vee \mathrm{Th_L}(q)) = \\
&= \boldsymbol{\sigma}((Y \vee \mathrm{Th_L}(p)) \cap (Y \vee \mathrm{Th_L}(q))) = \\
&= \boldsymbol{\sigma}(Y \vee (\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q))) = \\
&= \mathrm{Th_L}(\sigma[\mathrm{Th_L}(p) \cap \mathrm{Th_L}(q)]).
\end{aligned}$$ □

DŮSLEDEK 3.2.9. *Každá slabě implikativní distributivní logika je p-disjunkcionální.*

Zajímavým faktem je, že nevíme, platí-li v obecném případě i opačný směr tohoto důsledku (tj. zda je každá p-disjunkcionální slabě implikativní logika distributivní). Avšak jsme schopni tuto ekvivalenci dokázat pro velmi širokou třídu logik, konkrétně pro logiky mající vlastnost IPEP, která byla zavedena v definici 1.3.10 (připomeňme si, že tuto vlastnost má například každá finitární logika, viz důsledek 1.3.9). Tuto ekvivalenci obdržíme jako důsledek silnějšího tvrzení o ekvivalenci mezi *silně* p-disjunkcionálními a *rámcovými* logikami.

Než budeme ale moci přistoupit k důkazu výše zmíněných tvrzení, musíme zavést dva nové technické pojmy, které jsou však samy o sobě zajímavé: jako první zavedeme pojem ∇-prvofiltru (a ∇-prvoteorie) zobecněním klasického pojmu prvofiltru z teorie Booleových algeber, jako druhý zavedeme vlastnost PEP[5], jež je obdobou vlastnosti IPEP, se kterou jsme se setkali dříve, jen místo konečně $\cap$-ireducibilních teorií budeme požadovat, aby bázi Th(L) tvořily ∇-prvoteorie.

DEFINICE 3.2.10 (Prvofiltr). *Nechť* L *je logika v jazyce $\mathcal{L}$, ∇ je p-protodisjunkce, $\boldsymbol{A}$ je $\mathcal{L}$-algebra a $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Říkáme, že F je* ∇-prvofiltr*, pokud pro každé $a, b \in A$ platí: $a \nabla^{\boldsymbol{A}} b \subseteq F$ právě tehdy, když $a \in F$ nebo $b \in F$. V případě, kdy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}$, mluvíme o ∇-prvoteorii.*

Všimněme si, že pokud $\nabla = \{p \vee q\}$, pak předchozí definice splývá s běžnou definicí prvofiltru (připomeňme tvrzení 1.3.14).

LEMMA 3.2.11. *Nechť ∇ je (p)-disjunkce a $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in$* **MOD**(L) *je matice, kde F je ∇-prvofiltr. Pak $h^{-1}[F]$ je ∇-prvofiltr pro každý striktní (surjektivní) homomorfismus h.*

Důkaz. Uvažme striktní (surjektivní) homomorfismus $h\colon \langle \boldsymbol{B}, G\rangle \to \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ a předpokládejme, že $G = h^{-1}[F]$ není ∇-prvofiltr neboli že existují $a, b \notin h^{-1}[F]$, pro které platí $a \nabla^{\boldsymbol{B}} b \subseteq h^{-1}[F]$. Tedy $h(a), h(b) \notin F$ a $h[a \nabla^{\boldsymbol{B}} b] \subseteq F$. Využitím toho, že h je surjektivní nebo toho, že ∇ nemá parametry, dostaneme $h(a) \nabla^{\boldsymbol{A}} h(b) = h[a \nabla^{\boldsymbol{B}} b]$, čímž je důkaz dokončen. □

[5] Z angl. „prime extension property“. (Pozn. překladatele.)

DEFINICE 3.2.12. *Říkáme, že logika* L *má vlastnost* PEP *vzhledem k* ∇*, pokud* ∇*-prvoteorie tvoří bázi uzávěrového systému* Th(L).

LEMMA 3.2.13. *Každý* ∇*-prvofiltr je konečně* $\cap$*-ireducibilní. Pokud* ∇ *má* PCP *(resp. přenesenou* PCP*), pak každá konečně* $\cap$*-ireducibilní teorie (resp. každý konečně* $\cap$*-ireducibilní filtr v každé* $\mathcal{L}$*-algebře) je* ∇*-prvoteorie (resp.* ∇*-prvofiltr).*

Důkaz. Předpokládejme, že F není konečně $\cap$-ireducibilní; tj. $F = F_1 \cap F_2$ pro nějaké $F_i \supsetneq F$. Vezměme libovolná $a_i \in F_i \setminus F$. Tedy víme (díky (PD)), že $a_1 \nabla^{\boldsymbol{A}} a_2 \subseteq F_i$, a tak $a_1 \nabla^{\boldsymbol{A}} a_2 \subseteq F$ neboli F není ∇-prvofiltr.

Druhé tvrzení dokážeme pouze pro filtry (pro teorie je důkaz stejný). Uvažme $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ a předpokládejme, že F není ∇-prvofiltr, tj. existují $x \notin F$ a $y \notin F$ takové, že $x \nabla^{\boldsymbol{A}} y \subseteq F$. Z přenesené vlastnosti PCP víme, že $F = \mathrm{Fi}(F, x \nabla^{\boldsymbol{A}} y) = \mathrm{Fi}(F, x) \cap \mathrm{Fi}(F, y)$ neboli že F je průnikem dvou ostře větších filtrů. □

TVRZENÍ 3.2.14. *Nechť* ∇ *je p-protodisjunkce v* L*. Pokud* L *má* IPEP*, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. ∇ *má* PEP*, tj.* ∇*-prvoteorie tvoří bázi uzávěrového systému* Th(L).
2. ∇ *má* sPCP*, tj. pokud* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Delta \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\Gamma \nabla \Delta \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.
3. ∇ *má* PCP*, tj. pokud* $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$*, pak* $\Gamma, \varphi \nabla \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.
4. *Konečně* $\cap$*-ireducibilní a* ∇*-prvoteorie se shodují.*
5. *V každé* $\mathcal{L}$*-algebře se konečně* $\cap$*-ireducibilní a* ∇*-prvofiltry shodují.*

Navíc pokud libovolná logika L′ *má* PEP*, pak má i* IPEP*, a tedy splňuje podmínky* 2–5.

Důkaz. Začneme důkazem, že 1 implikuje 2: Uvažme situaci, kdy $\Phi \nabla \Psi \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$, pak užitím PEP dostaneme ∇-prvoteorii $T \supseteq \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi \nabla \Psi)$ takovou, že $T \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$. Pokud $\Phi \subseteq T$, pak $\Phi \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$ a jsme hotovi. V opačném případě tedy existuje $\varphi \in \Phi \setminus T$. Jelikož T je ∇-prvoteorie a pro každou formuli $\psi \in \Psi$ máme $\varphi \nabla \psi \subseteq T$, dostaneme $\Psi \subseteq T$, a tudíž $\Psi \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Důkaz, že 2 implikuje 3, je triviální. Lemmatem 3.2.13 jsme dokázali, že 3 implikuje 4, a užitím vlastnosti IPEP lze snadno dokázat, že 4 implikuje 1.

První čtyři body jsou tedy ekvivalentní. Pro zapojení posledního bodu si všimněme, že implikace z 5 do 4 platí triviálně a implikace z 2 do 5 je snadným důsledkem věty 3.2.6 a lemmatu 3.2.13.

K důkazu závěrečného tvrzení stačí použít lemma 3.2.13. □

VĚTA 3.2.15 (Sémantická charakterizace). *Pro každou slabě implikativní logiku* L *je následující ekvivalentní:*

1. L *je silně p-disjunkcionální,*
2. L *je filtrověrámcová,*
3. L *je rámcová,*
4. *pro každou teorii* T *a každou množinu formulí* Γ *platí:*

$$T \cap \bigvee_{\varphi \in \Gamma} \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) = \bigvee_{\varphi \in \Gamma} (T \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi)).$$

Pokud L *má* IPEP*, můžeme přidat:*

5. L *je p-disjunkcionální,*
6. L *je filtrovědistributivní,*
7. L *je distributivní,*
8. *pro každou teorii T a každou dvojici formulí φ, ψ platí:*

$$(T \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi)) \cap (T \vee \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = T \vee (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)).$$

Důkaz. Začneme důkazem, že 1 implikuje 2: použijeme větu 3.2.6, abychom ospravedlnili dvě z následujícího řetězce rovnic (konkrétně druhou a předposlední, ostatní jsou zřejmé):

$$F \cap \bigvee_{G \in \mathcal{F}} G = \mathrm{Fi}(F) \cap \mathrm{Fi}(\bigcup_{G \in \mathcal{F}} G) = \mathrm{Fi}(F \nabla \bigcup_{G \in \mathcal{F}} G) = \mathrm{Fi}(\bigcup_{G \in \mathcal{F}} (F \nabla G)) =$$

$$= \mathrm{Fi}(\bigcup_{G \in \mathcal{F}} \mathrm{Fi}(F \nabla G)) = \mathrm{Fi}(\bigcup_{G \in \mathcal{F}} (F \cap G)) = \bigvee_{G \in \mathcal{F}} (F \cap G).$$

Implikace z 2 do 3 a z 3 do 4 jsou triviální.

Abychom dokázali, že z 4 plyne 1, povšimněme si nejprve, že z lemmatu 3.2.8 již víme, že existuje p-disjunkce ∇. Můžeme napsat následující řetězec rovnic (první platí triviálně, druhá platí z předpokladu):

$$\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi) \cap (\bigvee_{\psi \in \Psi} \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = \bigvee_{\psi \in \Psi} (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) =$$

pokračujeme zopakováním prvního kroku, tentokrát pro Φ, a užitím faktu, že ∇ je p-disjunkce:

$$= \bigvee_{\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi} (\mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi) \cap \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\psi)) = \bigvee_{\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi} \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi \nabla \psi) =$$

zbytek důkazu je snadný:

$$= \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\bigcup_{\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi} \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\varphi \nabla \psi)) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\bigcup_{\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi} \varphi \nabla \psi) = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Phi \nabla \Psi).$$

Tím jsme dokázali ekvivalenci prvních čtyř tvrzení. Druhá část je komplikovanější, neboť větu o přenosu PCP jsme nedokázali (na rozdíl od věty o přenosu sPCP). Všimněme si, že i bez předpokladu na platnost IPEP lze dokázat platnost těchto směrů: z 2 do 6, z 6 do 7, z 7 do 8, z 8 do 5 (poslední implikace plyne z lemmatu 3.2.8 a ostatní jsou triviální). Zbývající směr (5 implikuje 1) plyne z tvrzení 3.2.14. □

DŮSLEDEK 3.2.16 (Distributivita implikuje rámcovost). *Nechť* L *je slabě implikativní logika mající* IPEP. *Pokud* L *je distributivní, pak je rámcová.*

DŮSLEDEK 3.2.17 (Přenos rámcovosti). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Pokud* L *je rámcová, pak je filtrověrámcová.*

Na závěr této části se podíváme na vztah mezi vlastností PEP (a tedy také (silné) p-disjunkcionality) a úplností logiky L vzhledem ke třídě $\mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L}) = \{\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}) \mid F$ je ∇-prvofiltr$\}$, tedy ke třídě jejích redukovaných modelů, jejichž filtry jsou ∇-prvofiltry. Připomeňme si, že z věty 3.2.14 plyne, že v p-disjunkcionálních logikách jsou konečně $\cap$-ireducibilní a ∇-prvofiltry filtry totožné, a tudíž $\mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L}) = \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$.

TVRZENÍ 3.2.18. *Nechť* L *je slabě implikativní logika a* ∇ *je p-protodisjunkce mající* PEP. *Pak* $\mathrm{L} = \models_{\mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L})}$.

Důkaz. Z tvrzení 3.2.14 víme, že PEP implikuje IPEP. Logika L je tedy podle věty 1.3.22 úplná vzhledem ke třídě RFSI modelů a (jak víme) v tomto případě $\mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L}) = \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$. □

V případě bez parametrů lze snadno ukázat i opačný směr (zdali opačný směr platí také v případě s parametry, je zatím otevřený problém).

TVRZENÍ 3.2.19. *Protodisjunkce* ∇ *má* PEP *právě tehdy, když* $\mathrm{L} = \models_{\mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L})}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $T \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$. Tedy existuje $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L})$ a ohodnocení e takové, že $e[T] \subseteq F$ a zároveň $e(\chi) \notin F$. Definujeme $T' = e^{-1}[F]$. Zřejmě platí: T' je teorie, $T' \supseteq T$, $\chi \notin T'$ a podle lemmatu 3.2.11 je T' ∇-prvofiltr. □

PŘÍKLAD 3.2.20. *Standardní nekonečněhodnotová Łukasiewiczova logika je silně disjunktivní.* Uvažujme Łukasiewiczovu logiku Ł zavedenou v příkladu 1.3.11 použitím matice $[0,1]_{Ł}$. Definujme $\varphi \vee \psi$ jako $(\varphi \to \psi) \to \psi$, pak snadno ověříme, že $x \vee^{[0,1]_{Ł}} y = \max\{x, y\}$, a tudíž $\{1\}$ je $\vee$-prvofiltr, tedy (podle předchozího tvrzení) má $\vee$ jak PEP, tak sPCP.

3.3 Disjunkce a axiomatizovatelnost

V poslední sekci této kapitoly ukážeme vybrané aplikace zavedené teorie disjunkce: podíváme se na zachování vlastnosti důkazu po případech při rozšíření logiky; ukážeme, jak vypadá nejmenší logika, kde ∇ splňuje sPCP; popíšeme, jak využít p-disjunkci k tomu, abychom našli axiomatizaci extenze dané logiky L definované sémanticky pomocí pozitivní univerzální třídy modelů L nebo (pro finitární logiky) pomocí nezáporné univerzální třídy modelů. Jako konkrétní případ ukážeme jak axiomatizovat průnik dvou (axiomatických) extenzí dané logiky.

VĚTA 3.3.1 (Zachování sPCP). *Nechť* L_1 *je logika v jazyce* $\mathcal{L}_1$ *a* ∇ *silná p-disjunkce, dále nechť* L_2 *je rozšíření* L_1 *v jazyce* $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1$ *o množinu konsekucí* C *uzavřenou na* $\mathcal{L}_2$*-substituce. Pak* ∇ *je silná p-disjunkce v* L_2 *právě tehdy, když* $R^\nabla \subseteq \mathrm{L}_2$ *pro každou* $R \in C$*. Konkrétně tedy platí, že každé axiomatické rozšíření p-disjunkcionální logiky je p-disjunkcionální.*

Důkaz. Směr zleva doprava je přímým důsledkem věty 3.2.4. Pro opačný směr uvažme nějakou prezentaci $\mathcal{AS}$ logiky L_1. Víme, že L_2 má prezentaci $\mathcal{AS}' = \{\sigma[\Gamma] \rhd \sigma\varphi \mid \sigma$ je $\mathcal{L}_2$-substituce, $\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{AS} \cup C\}$. Tedy musíme ukázat, že pro každé $\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{AS} \cup C$ a pro každou $\mathcal{L}_2$-substituci σ máme $(\sigma[\Gamma] \rhd \sigma\varphi)^\nabla \subseteq \mathrm{L}_2$ neboli pro každou $\mathcal{L}_2$-formuli χ, každou $\delta(p, q, r_1, \dots, r_n) \in \nabla$ a každou posloupnost $\mathcal{L}_2$-formulí $\vec{\alpha}$ platí: $\sigma[\Gamma] \nabla \chi \vdash_{\mathrm{L}_2} \delta(\sigma\varphi, \chi, \vec{\alpha})$. Případ, kdy $\Gamma \rhd \varphi \in C$, platí z předpokladu; nyní odůvodníme zbývající případ.

Uvažme libovolnou enumeraci výrokových proměnných takovou, že $p_0 = q$, $p_i = r_i$, dále mějme $\mathcal{L}_1$-substituce ρ, ρ^{-1} a $\mathcal{L}_2$-substituci $\bar{\sigma}$ definované jako:

- $\rho p_i = p_{i+n+1}$,
- $\rho^{-1} p_i = p_{i-n-1}$ pro $i > n$ a p_i jinak,
- $\bar{\sigma} p_i = \sigma p_{i-n-1}$ pro $i > n$, $\bar{\sigma} p_i = \alpha_i$ pro $1 \leq i \leq n$ a $\bar{\sigma} p_0 = \chi$.

Všimněme si, že platí $\rho^{-1}\rho\psi = \psi$ a $\bar{\sigma}\rho\psi = \sigma\psi$. Dále z $\Gamma \rhd \varphi \in \mathcal{AS}$ víme, že $\rho[\Gamma] \rhd \rho\varphi \in \mathcal{AS}$, a protože ∇ je p-disjunkce v L_1, dostaneme díky větě 3.2.4 také $(\rho[\Gamma] \rhd \rho\varphi)^{\nabla} \subseteq \mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}_2$, a tedy mimo jiné $\rho[\Gamma] \nabla q \vdash_{\mathrm{L}_2} \delta(\rho\varphi, q, \vec{r})$. Tudíž také platí $\bar{\sigma}[\rho[\Gamma] \nabla q] \vdash_{\mathrm{L}_2} \bar{\sigma}\delta(\rho\varphi, q, \vec{r})$. Jelikož očividně platí $\bar{\sigma}\delta(\rho\varphi, q, \vec{r}) = \delta(\sigma\varphi, \chi, \vec{\alpha})$, stačí pro dokončení důkazu ukázat $\bar{\sigma}[\rho[\Gamma] \nabla q] \subseteq \sigma[\Gamma] \nabla \chi$. K tomu si stačí všimnout, že formule v $\bar{\sigma}[\rho[\Gamma] \nabla q]$ jsou tvaru $\delta'(\sigma\psi, \chi, \bar{\sigma}\alpha_1, \ldots, \bar{\sigma}\alpha_n)$ pro nějakou $\psi \in \Gamma$, $\delta'(p, q, \vec{r}) \in \nabla$ a posloupnost $\mathcal{L}_2$-formulí $\vec{\alpha}$. □

DŮSLEDEK 3.3.2 (Zachování PEP). *Pokud p-protodisjunkce* ∇ *má vlastnost* PEP *v logice* L*, pak ji má i v každé axiomatické extenzi* L′ *logiky* L.

Důkaz. Z tvrzení 3.2.14 snadno vyvodíme, že L je silně p-disjunkcionální a má IPEP. Díky lemmatu 1.3.12 a díky předchozí větě víme, že také L′ je silně p-disjunkcionální a má IPEP. Důkaz lze tedy zakončit odvoláním se na tvrzení 3.2.14. □

Je očividné, že pro každý systém logik v daném jazyce, ve kterých má p-protodisjunkce ∇ vlastnost sPCP, má ∇ také sPCP v průniku těchto logik. Také si všimněme, že ve sporné logice libovolná množina ∇ splňuje sPCP. Z těchto úvah plyne korektnost následující definice:

DEFINICE 3.3.3 (Logika L^{∇}). *Nechť* L *je logika a* ∇ *p-protodisjunkce.* ∇*-extenze logiky* L*, kterou značíme jako* L^{∇}*, je nejmenší extenzí* L*, kde* ∇ *má* sPCP.

V dalším tvrzení ukážeme, že ∇-extenze finitární logiky je finitární, poté ∇-extenzi sémanticky i syntakticky charakterizujeme. Bohužel pro obě tyto charakterizace se musíme omezit na protodisjunkce bez parametrů; případ s parametry je prozatím otevřený problém.

TVRZENÍ 3.3.4. *Nechť* L *je finitární logika a* ∇ *p-protodisjunkce. Pak* L^{∇} *je finitární a rovná se průniku všech* finitárních *extenzí* L*, kde* ∇ *má* sPCP.

Důkaz. Připomeňme si, že finitární fragment logiky S, značený jako $\mathcal{FC}(\mathrm{S})$, je největší finitární logikou obsaženou v S. Tedy jelikož L je finitární, víme, že $\mathrm{L} \subseteq \mathcal{FC}(\mathrm{L}^{\nabla}) \subseteq \mathrm{L}^{\nabla}$. Pokud ukážeme, že ∇ má sPCP v $\mathcal{FC}(\mathrm{L}^{\nabla})$, dostaneme $\mathcal{FC}(\mathrm{L}^{\nabla}) = \mathrm{L}^{\nabla}$, a tedy L^{∇} je finitární. Snadno lze dokonce dokázat obecně následující: pokud ∇ má sPCP v S, pak má sPCP také v $\mathcal{FC}(\mathrm{S})$. □

TVRZENÍ 3.3.5 (Sémantika L^{∇}). *Nechť* L *je slabě implikativní logika a* ∇ *protodisjunkce taková, že* L^{∇} *má* IPEP.[6] *Pak:*

$$\mathrm{L}^{\nabla} = \models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})}.$$

Důkaz. Jako první si všimněme, že protože vlastnost být ∇-prvofiltrem v dané matici nezávisí na logice, máme: $\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L}) = \mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})})$. Pak díky tvrzením 3.2.19 a 3.2.14 má ∇ sPCP v logice $\models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})}$, a tudíž $\mathrm{L}^{\nabla} \subseteq \models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})}$. Z předpokladu, že logika L^{∇} má IPEP pak díky tvrzení 3.2.14 a 3.2.19 víme, že $\mathrm{L}^{\nabla} = \models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L}^{\nabla})}$. Protože očividně $\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L}^{\nabla}) \subseteq \mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})$, máme $\models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})} \subseteq \mathrm{L}^{\nabla}$, čímž je důkaz hotov. □

[6] Poznamenejme, že z předchozího tvrzení plyne, že L^{∇} má IPEP, například kdykoli je L finitární.

Všimněme si, že v případě s parametry bychom mohli dokázat pouze slabší tvrzení:

$$\mathrm{L}^{\nabla} = (\models_{\mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L})})^{\nabla}.$$

VĚTA 3.3.6 (Axiomatizace L^{∇}). *Nechť* L *je logika s prezentací* $\mathcal{AS}$ *a* ∇ *nechť je protodisjunkce splňující* (C_{∇}), (I_{∇}) *a* (A_{∇}). *Pak logika* L^{∇} *má prezentaci* $\mathcal{AS} \cup \bigcup\{R^{\nabla} \mid R \in \mathcal{AS}\}$.

Důkaz. Označme $\hat{\mathrm{L}}$ logiku axiomatizovanou množinou $\mathcal{AS} \cup \bigcup\{R^{\nabla} \mid R \in \mathcal{AS}\}$ (tato množina je uzavřena na substituce, protože předpokládáme, že ∇ je bez parametrů). Zřejmě pro každou konsekuci R z tohoto axiomatického systému máme $R^{\nabla} \subseteq \hat{\mathrm{L}}$ (díky lemmatu 3.2.3, bod 2), a tedy užitím věty 3.2.5 dostaneme, že $\hat{\mathrm{L}}$ má sPCP.

Nechť L' je extenze L, která má sPCP. Všimněme si, že pro libovolné $R \in \mathcal{AS}$ máme jak $R \in \mathrm{L}'$, tak $R^{\nabla} \subseteq \mathrm{L}'$ (díky větě 3.2.4). Tedy lze snadno nahlédnout, že platí $\hat{\mathrm{L}} \subseteq \mathrm{L}'$. □

Všimněme si, že bychom nemuseli požadovat splnění podmínek (C_{∇}), (I_{∇}) a (A_{∇}), kdybychom je a jejich ∇-formy přidali k axiomatizaci L^{∇}.

Připomeňme, že logické matice lze uvažovat jako klasické prvořádové struktury, kde algebraické operace jsou interpretace příslušných funkčních symbolů (spojek) a filtr F je interpretací unárního predikátu $\mathbf{F}$, tj. všechny atomické formule v odpovídajícím prvořádovém jazyce jsou tvaru $\mathbf{F}(\varphi)$, kde φ je formule. Připomeňme dále, že pozitivní klauzule C je disjunkce $\bigvee_{\varphi\in\Sigma_C} \mathbf{F}(\varphi)$ konečně mnoha atomických formulí. V souladu s klasickou teorií modelů říkáme, že množina pozitivních klauzulí $\mathcal{C}$ platí v matici $\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ (nebo také, že $\mathbf{M}$ je modelem $\mathcal{C}$), značíme $\mathbf{M} \models \mathcal{C}$, pokud pro každou $C \in \mathcal{C}$ a každé $\mathbf{M}$-ohodnocení e existuje $\varphi \in \Sigma_C$ takové, že $e(\varphi) \in F$. Pozitivní univerzální třída matic je pak soubor všech modelů nějaké množiny univerzálních uzávěrů pozitivních klauzulí.[7]

V následující větě použijeme p-disjunkci dané logiky k axiomatizaci její extenze definované sémanticky nějakou pozitivní univerzální třídou jejích modelů.

VĚTA 3.3.7. *Nechť* L *je logika mající* IPEP*,* ∇ *je p-disjunkce a* $\mathcal{C}$ *je množina pozitivních klauzulí, poté platí*

$$\models_{\{\mathbf{A}\in\mathbf{MOD}^{*}(\mathrm{L})\ \mid\ \mathbf{A}\models\mathcal{C}\}} = \mathrm{L} + \bigcup\{\nabla_{\psi\in\Sigma_C}\psi \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Důkaz. Nejprve označme množinu formulí[8] $\nabla_{\psi\in\Sigma_C}\psi$ jako C_{∇} a povšimněme si, že pro každou matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ máme: pokud $\mathbf{A} \models C$, pak $\models_{\mathbf{A}} C_{\nabla}$. Navíc, pokud F je ∇-prvofiltr, pak platí i obrácená implikace.

Logiku na levé straně označíme L^{l} a tu na pravé straně L^{p}. Očividně platí $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}^{l}$, a tedy jako důsledek výše uvedeného pozorování dostaneme: $\vdash_{\mathrm{L}^{l}} C_{\nabla}$ pro každou $C \in \mathcal{C}$. Tedy $\mathrm{L}^{p} \subseteq \mathrm{L}^{l}$.

Druhou inkluzi $\mathrm{L}^{l} \subseteq \mathrm{L}^{p}$ dokážeme kontrapozicí. Předpokládejme, že existuje množina formulí $\Gamma\cup\{\varphi\}$ taková, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}^{p}} \varphi$. Z věty 3.3.1 víme, že ∇ je p-disjunkce v L^{p}, díky tvrzení 3.2.14 má PEP, a tudíž díky tvrzení 3.2.18 existuje $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L}^{p})$ taková, že $\Gamma \not\models_{\mathbf{A}} \varphi$. Jelikož $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^{p}_{\nabla}(\mathrm{L}^{p})$, víme, že $\models_{\mathbf{A}} C_{\nabla}$ pro každé $C \in \mathcal{C}$ a F je ∇-prvofiltr, a tudíž dle pozorování ze začátku důkazu $\mathbf{A} \models \mathcal{C}$, z čehož tedy víme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}^{l}} \varphi$. □

[7] Pozitivní univerzální třídy jsou většinou definované jako soubory všech modelů *pozitivních univerzálních formulí*, tj. univerzálních uzávěrů formulí sestavených z atomů pouze užitím konjunkce a disjunkce. Je zřejmé, že každá taková formule může být napsána jako univerzální uzávěr konjunkce pozitivních klauzulí, a tedy třída modelů generovaná takovou množinou je totožná s třídou generovanou příslušnými pozitivními klauzulemi.

[8] Rozšíření binárního operátoru ∇ na operátor aplikovaný na konečnou množinu je dobře definované díky asociativitě (co se dokazatelnosti týče).

DŮSLEDEK 3.3.8. *Nechť* L *je logika mající* IPEP, ∇ *je p-disjunkce v* L *a* L_1 *a* L_2 *jsou axiomatické extenze* L *o množiny* $\mathcal{A}_1$ *a* $\mathcal{A}_2$. *Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že* $\mathcal{A}_1$ *a* $\mathcal{A}_2$ *jsou zadány s disjunktními množinami proměnných.*[9] *Pak:*

$$L_1 \cap L_2 = L + \bigcup \{\varphi \nabla \psi \mid \varphi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2\}.$$

Důkaz. Uvědomme si, že platí $L_1 \cap L_2 = \models_{\mathbf{MOD}^*(L_1) \cup \mathbf{MOD}^*(L_2)}$ a označme $\mathcal{A}$ množinu pozitivních klauzulí $\{\mathbf{F}(\varphi) \vee \mathbf{F}(\psi) \mid \varphi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2\}$. Když ukážeme $\mathbf{MOD}^*(L_1) \cup \mathbf{MOD}^*(L_2) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(L) \mid \mathbf{A} \models \mathcal{A}\}$, tak je důkaz hotov podle věty 3.3.7.

Jedna inkluze je triviální. Druhou ukážeme kontrapozicí: uvažme $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(L)$ takové, že $\mathbf{A} \notin \mathbf{MOD}^*(L_1) \cup \mathbf{MOD}^*(L_2)$, tj. existují $\varphi_i \in \mathcal{A}_i$ takové, že $\not\models_{\boldsymbol{A}} \varphi_i$. Uvažme ohodnocení e_i, které to dosvědčuje. Jelikož φ_1 a φ_2 nesdílejí žádné výrokové proměnné, existuje jedno ohodnocení, které dosvědčuje oba případy najednou a toto ohodnocení také ukazuje: $\mathbf{A} \not\models \mathbf{F}(\varphi_1) \vee \mathbf{F}(\varphi_2)$. □

Důsledkem věty 3.3.7 je mimo jiné následující příklad, který ukazuje, že v některých případech lze užitím disjunkce velmi snadno axiomatizovat lineárně uspořádané modely dané logiky. Logiky úplné vzhledem ke třídě lineárně uspořádaných matic budou ústředním tématem následující kapitoly.

PŘÍKLAD 3.3.9. Jelikož $\vee$ je disjunkce v logice FL_{ew} a každá matice $\mathbf{M} \in \mathbf{MOD}(FL_{ew})$ je lineárně uspořádaná právě tehdy, když $\mathbf{M} \models \mathbf{F}(\varphi \to \psi) \vee \mathbf{F}(\psi \to \varphi)$, můžeme použít větu 3.3.7 a dostat:

$$\models_{\{\mathbf{B} \in \mathbf{MOD}^*(FL_{ew}) \mid \mathbf{B} \text{ je lineárně uspořádaná}\}} = FL_{ew} + (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi).$$

Na závěr této sekce se omezíme na finitární logiky, což nám umožní ukázat rozšíření předchozí věty na takzvané *nezáporné klauzule H*, což jsou formule klasické predikátové logiky ve tvaru

$$\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_H} \mathbf{F}(\varphi) \to \bigvee_{\psi \in \Sigma_H} \mathbf{F}(\psi),$$

kde Σ_H, Γ_H jsou konečné množiny formulí a Σ_H je neprázdná.

Říkáme, stejně jako v minulém případě, že množina nezáporných klauzulí $\mathcal{H}$ platí v matici $\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{A}, F \rangle$ (nebo, že $\mathbf{M}$ je model $\mathcal{H}$), značíme $\mathbf{M} \models \mathcal{H}$, pokud pro každou $H \in \mathcal{H}$ a každé $\mathbf{M}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma_H] \subseteq F$, existuje nějaká $\varphi \in \Sigma_H$ taková, že $e(\varphi) \in F$.

VĚTA 3.3.10. *Nechť* L *je finitární logika,* ∇ *je p-protodisjunkce a* $\mathcal{H}$ *množina nezáporných klauzulí. Pak:*

$$(\models_{\{\mathbf{B} \in \mathbf{MOD}^*(L) \mid \mathbf{B} \models \mathcal{H}\}})^{\nabla} = (L + \bigcup \{\Gamma_H \rhd \nabla_{\psi \in \Sigma_H} \psi \mid H \in \mathcal{H}\})^{\nabla}.$$

Důkaz. Označme konsekuci $\Gamma_H \rhd \nabla_{\psi \in \Sigma_H} \psi$ jako H_∇ a uvědomme si, že pro každou matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F \rangle$ máme: když $\mathbf{A} \models H$, pak $\Gamma_H \models_{\mathbf{A}} \nabla_{\psi \in \Sigma_H} \psi$. Navíc pokud F je ∇-prvofiltr, pak platí i opačná implikace.

První část tohoto pozorování nám dává

$$\models_{\{\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(L) \mid \mathbf{A} \models \mathcal{H}\}} \supseteq L + \bigcup \{\Gamma_H \rhd \nabla_{\psi \in \Sigma_H} \psi \mid H \in \mathcal{H}\}.$$

[9] K ověření tohoto tvrzení uvažme libovolnou enumeraci proměnných $\{p_i \mid i \leq |Var|\}$ a definujme substituce $\sigma_1 p_i = p_{2i}$ a $\sigma_2 p_i = p_{2i+1}$. Je jasné, že existují také substituce σ_i' takové, že $\sigma_i' \sigma_i \varphi = \varphi$. Tedy pro každou množinu axiomů $\mathcal{A}$ platí: $\{\sigma[\mathcal{A}] \mid \sigma \text{ je substituce}\} = \{\sigma[\sigma_i[\mathcal{A}]] \mid \sigma \text{ je substituce}\}$, a tedy $L + \mathcal{A}_i = L + \sigma_i[\mathcal{A}_i]$. Zřejmě platí, že množiny proměnných vyskytujících se v $\sigma_1[\mathcal{A}_1]$ a $\sigma_2[\mathcal{A}_2]$ jsou disjunktní.

Očividně stejná inkluze platí i pro ∇-extenze obou logik. Dále použijeme tvrzení 3.3.4 a ukážeme, že logika na pravé straně je finitární. Z toho dále dostaneme, že má PEP (tvrzení 3.2.14), a tedy dle tvrzení 3.2.18 je tato logika úplná vzhledem ke třídě $\mathbb{K}$ svých redukovaných matic, jejichž filtry jsou ∇-prvofiltry. Očividně $\mathbb{K} \subseteq \mathbf{MOD}^p_\nabla(\mathrm{L})$, a tedy podle druhé části pozorování ze začátku důkazu dostaneme $\mathbb{K} \subseteq \{\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}) \mid \mathbf{A} \models \mathcal{H}\}$, a tedy také

$$\models_{\{\mathbf{B} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}) \mid \mathbf{B} \models \mathcal{H}\}} \subseteq \models_{\mathbb{K}} = (\mathrm{L} + \bigcup\{\Gamma_H \rhd \nabla_{\psi \in \Sigma_H} \psi \mid H \in \mathcal{H}\})^\nabla.$$

Zbytek důkazu je triviální. □

Nechť $R = \Gamma \rhd \varphi$ a $S = \Delta \rhd \psi$ jsou konsekuce, zápisem $R \nabla S$ označujeme množinu konsekucí $\{\Gamma, \Delta \rhd \chi \mid \chi \in \varphi \nabla \psi\}$.

VĚTA 3.3.11. *Nechť* L *je finitární logika,* ∇ *p-protodisjunkce a* L_1 *a* L_2 *jsou finitární extenze logiky* L *získané přidáním množin finitárních konsekucí* C_1 *a* C_2*. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že* C_1 *a* C_2 *jsou zapsány s disjunktními množinami proměnných. Pak:*

$$(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2)^\nabla = (\mathrm{L} + \bigcup\{R \nabla S \mid R \in C_1, S \in C_2\})^\nabla.$$

Důkaz. Platí: $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2 = \models_{\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_1) \cup \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_2)}$. Pokud $R = \Gamma \rhd \varphi \in C_1$ a $S = \Delta \rhd \psi \in C_2$, pak $R \vee S$ značíme následující množinu nezáporných klauzulí:

$$\bigwedge_{\chi \in \Gamma \cup \Delta} F(\chi) \to \mathbf{F}(\varphi) \vee \mathbf{F}(\psi).$$

Nakonec definujme $\mathcal{H} = \{R \vee S \mid R \in C_1, S \in C_2\}$. Pokud ukážeme, že $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_1) \cup \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_2) = \{\mathbf{B} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}) \mid \mathbf{B} \models \mathcal{H}\}$, jsme hotovi díky větě 3.3.10.

Jedna inkluze je triviální. Druhou ukážeme kontrapozicí: mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ takovou, že $\mathbf{A} \notin \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_1) \cup \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L}_2)$, tj. existuje $R_i = \Gamma_i \rhd \varphi_i \in C_i$ takové, že $\Gamma_i \not\models_{\mathbf{A}} \varphi_i$. Uvažme ohodnocení e_1 a e_2, která to dosvědčují. Jelikož R_1 a R_2 nesdílejí žádné výrokové proměnné, existuje jedno ohodnocení, které potvrzuje oba případy najednou, a toto ohodnocení také ukazuje: $\mathbf{A} \not\models R_1 \vee R_2$. □

Zřejmě platí, že pokud logika $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ je disjunkcionální, pak nám předešlá věta spolu s větou 3.3.6 dává její axiomatiku. Navíc když L sdílí disjunkci ∇ s logikou $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, dostaneme:

$$\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2 = \mathrm{L} + \bigcup\{(R \nabla S)^\nabla \mid R \in C_1, S \in C_2\}.$$

Kapitola 4

Semilineární logiky

Po substrukturálních logikách se v této kapitole seznámíme s další důležitou třídou logik. Tyto logiky jsou v posledních desetiletích intenzivně studovány v rámci takzvané *matematické fuzzy logiky* a jejich esenciální vlastností je, že mají úplnou sémantiku založenou na lineárně uspořádaných algebrách/maticích. Tuto myšlenku můžeme přirozeně formalizovat v rámci naší teorie slabě implikativních logik, a to využitím faktu, že redukované matice jsou přirozeně uspořádané užitím principálních implikací ($a \leq b$ právě tehdy, když $a \to b \in F$). Zaměříme se tedy na slabě implikativní logiky, které jsou úplné vzhledem k maticím, pro které je toto uspořádání lineární. Pro tyto logiky zavádíme technický pojem *semilineární logiky* a celou poslední kapitolu tohoto textu zasvětíme jejich studiu.

V první sekci nejprve podáme technické definice semilineární implikace a semilineárních logik a pro tyto účely zavedeme nové pomocné pojmy (obdobně jako jsme postupovali v případě disjunkcí). Dále ukážeme nějaké charakterizace semilinearity pomocí speciální báze uzávěrového systému teorií dané logiky či vhodného metapravidla. Ve druhé sekci se budeme zabývat hlubokým vztahem mezi semilineární implikací a disjunkcí a dokážeme zajímavé důsledky: charakterizaci semilinearity pomocí disjunkce a axiomatizaci minimální semilineární logiky, která je extenzí nějaké logiky. Ve třetí sekci se budeme zabývat typickým předmětem studia fuzzy logik: úplností vůči hustě uspořádaným maticím; tuto vlastnost opět charakterizujeme užitím vhodného metapravidla a principu rozšíření. Na závěr ve čtvrté sekci budeme uvažovat úplnost semilineárních logik vůči libovolném třídám lineárně uspořádaných modelů, dokážeme důležité charakterizace užitím vlastností vnoření a budeme se zabývat speciálními případy tříd modelů, jako jsou třídy konečných řetězců či modely na reálných a racionálních číslech.

4.1 Základní definice, vlastnosti a charakterizace

Naším cílem je zkoumat slabě implikativní logiky úplné vůči sémantice dané lineárně uspořádanými maticemi. Jelikož víme, že principální implikace v těchto logikách indukují maticové předuspořádání (v případě redukovaných matic dokonce uspořádání), můžeme vyslovit následující přirozenou definici:

DEFINICE 4.1.1 (Lineární filtr a lineární model). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Uvažme libovolnou netriviální matici* $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$*. Říkáme, že filtr* F *je* lineární*, pokud* $\leq_{\mathbf{A}}$ *je lineární předuspořádání, tj. pro každé* $a, b \in A$*,* $a \to^{A} b \in F$ *nebo* $b \to^{A} a \in F$*. Navíc říkáme, že* $\mathbf{A}$ *je* lineárně uspořádaný model *(nebo pouze* lineární model*), pokud* $\leq_{\mathbf{A}}$ *je lineární uspořádání (tzn.:* F *je lineární filtr a* $\mathbf{A}$ *je redukovaná matice). Třídu všech lineárních modelů značíme jako* $\mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.

Nyní máme vše připraveno pro formální definici ústředního pojmu této kapitoly:

DEFINICE 4.1.2 (Semilineární implikace, semilineární logika). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Říkáme, že její slabá implikace* $\to$ *je* semilineární implikace*, pokud lineární modely, které tato spojka definuje, jsou úplnou sémantikou pro* L*, tj.* $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})}$*. Dále říkáme, že slabě implikativní logika je* semilineární*, pokud má semilineární implikaci.*

Již jsme se setkali se třemi prominentními logikami, které očividně splňují definici semilinearity: klasická logika CL, Łukasiewiczova logika $Ł_\infty$ a Gödel-Dummettova logika G. Později v této sekci naopak dokážeme, že řada dalších logik, které jsme viděli v předchozích kapitolách, *není* semilineární (tj. není v nich definovatelná *žádná* semilineární implikace).

Všimněme si, že třída lineárních modelů není pro danou logiku jednoznačně určena, ale záleží na volbě principální implikace (ve větě 4.1.7 ale ukážeme, že všechny semilineární implikace definují *totožnou* třídu lineárních modelů). Například v klasické logice jsou obě spojky $\to$ i $\equiv$ slabé implikace, ale pouze $\to$ dělá logiku semilineární (lineární modely vzhledem k $\to$ jsou dva: triviální model a model založený na dvouprvkové Booleově algebře, na druhou stranu jediný lineární model vzhledem k $\equiv$ je ten triviální). Rozšiřme tedy naši konvenci týkající se *principální* implikace (viz text za definicí 1.2.1): kdykoli říkáme, že logika je semilineární, míníme, že její principální implikace je *semilineární* slabá implikace.

Použitá terminologie *semilineární logika* plyne z tradice univerzální algebry nazývat třídu algeber „semi$X$“, kdykoli její subdirektně ireducibilní členy mají vlastnost X: věta 4.1.7 totiž říká, že ve všech semilineárních logikách jsou subdirektně ireducibilní modely lineárně uspořádané, a dle věty 4.1.8 tato vlastnost dokonce charakterizuje *finitární* semilineární logiky.

Naše studium semilineárních logik zahájíme pozorováním několika zajímavých vlastností lineárních filtrů.

LEMMA 4.1.3. *Pro každou slabě implikativní logiku* L*,* $\mathcal{L}$*-algebru* $\boldsymbol{A}$ *a lineární filtr* F *je množina* $[F, A] = \{G \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) \mid F \subseteq G\}$ *lineárně uspořádaná inkluzí.*[1]

Důkaz. Předpokládejme, že existují dva neporovnatelné filtry $G_1, G_2 \in [F, A]$ a uvažme prvky $a_1 \in G_1 \setminus G_2$ a $a_2 \in G_2 \setminus G_1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_1 \leq_{\langle A, F\rangle} a_2$. Z toho plyne $a_1 \to^{A} a_2 \in F \subseteq G_1$ a díky (MP) také $a_2 \in G_1$, což je spor. □

TVRZENÍ 4.1.4. *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Pak každý lineární filtr je konečně* $\cap$*-ireducibilní, tzn.* $\mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L}) \subseteq \mathbf{MOD}^{*}(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$.

Důkaz. Pokud $\boldsymbol{A}$ je $\mathcal{L}$-algebra a $F \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$ je lineární filtr, víme (z minulého lemmatu), že množina $[F, A]$ je lineárně uspořádaná inkluzí. Předpokládejme, že $F = G_1 \cap G_2$ pro nějaké $G_1, G_2 \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$. Pak platí $G_1 \subseteq G_2$, a tedy $F = G_1$, nebo platí $G_2 \subseteq G_1$, a tedy $F = G_2$; F je tedy konečně $\cap$-ireducibilní. Druhé tvrzení je přímý důsledek věty 1.3.17. □

[1] Poznamenejme, že pokud L je algebraicky implikativní a $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$, pak $\mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}) = [F, A]$.

Připomeňme (důsledek 1.3.9), že ve finitárních logikách tvoří *konečně $\cap$-ireducibilní teorie* bázi uzávěrového systému Th(L) neboli mají IPEP. Nabízí se zajímavá otázka, za jakých podmínek *lineární* teorie tvoří bázi Th(L). Analogicky jako při studiu disjunkce se ukáže, že tato otázka úzce souvisí s platností jistého metapravidla.

DEFINICE 4.1.5. *Říkáme, že slabě implikativní logika* L *má:*

- *Vlastnost* LEP[2], *pokud její lineární teorie tvoří bázi* Th(L), *tzn. pro každou teorii T a každou formuli $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}} \setminus T$ existuje lineární teorie $T' \supseteq T$ taková, že $\varphi \notin T'$.*
- Vlastnost semilinearity SLP[3], *pokud platí následující metapravidlo:*

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi \qquad \Gamma, \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi}{\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \chi}.$$

Poznamenejme, že obě výše definované vlastnosti jsou vlastnosti dvojice tvořené logikou L a implikací $\to$. V souladu s naší obecnou konvencí, pokud není implikace explicitně zmíněna, pracujeme se zafixovanou principální implikací dané logiky.

Jako další ukážeme větu o přenosu SLP. Připomeňme náš předpoklad, že množina výrokových proměnných *Var* je spočetná.

VĚTA 4.1.6 (Přenos SLP). *Uvažme slabě implikativní logiku* L *mající* SLP. *Pak pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ a každou množinu $X \cup \{a, b\} \subseteq A$ platí následující:*

$$\mathrm{Fi}(X, a \to b) \cap \mathrm{Fi}(X, b \to a) = \mathrm{Fi}(X).$$

Důkaz. K důkazu netriviální implikace mějme $t \notin \mathrm{Fi}(X)$, ukážeme že $t \notin \mathrm{Fi}(X, a \to b)$ nebo $t \notin \mathrm{Fi}(X, b \to a)$. Rozlišíme dva případy:

1) *Jako první předpokládejme, že A je spočetná.* Můžeme předpokládat, že množina výrokových proměnných *Var* obsahuje (nebo je jí rovna) množinu $\{v_z \mid z \in A\}$ (kde $v_z \neq v_w$, kdykoli $z \neq w$). Uvažme následující množinu formulí:

$$\Gamma = \{v_z \mid z \in \mathrm{Fi}(X)\} \cup \bigcup_{\langle c,n\rangle \in \mathcal{L}} \{c(v_{z_1}, \ldots, v_{z_n}) \leftrightarrow v_{c^{\boldsymbol{A}}(z_1,\ldots,z_n)} \mid z_i \in A\}.$$

Zřejmě $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} v_t$ (protože $\langle \boldsymbol{A}, \mathrm{Fi}(X)\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$ a pro $\boldsymbol{A}$-ohodnocení $e(v_z) = z$: $e[\Gamma] \subseteq \mathrm{Fi}(X)$ a $e(v_t) \notin \mathrm{Fi}(X)$). Tedy díky SLP dostaneme $\Gamma, v_a \to v_b \nvdash_{\mathrm{L}} v_t$ nebo $\Gamma, v_b \to v_a \nvdash_{\mathrm{L}} v_t$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme první scénář a definujme $T' = \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(\Gamma, v_a \to v_b)$. Ukážeme, následujícím řetězcem rovností, že zobrazení $h\colon A \to Fm_{\mathcal{L}}/\Omega T'$ definované jako $h(z) = [v_z]_{T'}$ je homomorfismus:

$$\begin{aligned} h(c^{\boldsymbol{A}}(z_1, \ldots, z_n)) &= [v_{c^{\boldsymbol{A}}(z_1,\ldots,z_n)}]_{T'} = [c(v_{z_1}, \ldots, v_{z_n})]_{T'} \\ &= c^{\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}/\Omega T'}([v_{z_1}]_{T'}, \ldots, [v_{z_n}]_{T'}) = c^{\boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}/\Omega T'}(h(z_1), \ldots, h(z_n)). \end{aligned}$$

Z toho dostaneme $F = h^{-1}[T'] \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A})$, a protože platí $X \cup \{a \to b\} \subseteq F$ a $t \notin F$, můžeme uzavřít: $t \notin \mathrm{Fi}(X, a \to b)$.

[2] Z angl. „linear extension property". (Pozn. překladatele.)
[3] Z angl. „semilinearity property". (Pozn. překladatele.)

2) *Zadruhé předpokládejme, že A je nespočetná množina.* Pro tento důkaz předpokládejme, že množina proměnných je součástí pojmu jazyka, tj. výrokový jazyk obsahuje kromě množiny spojek i množinu proměnných. Zavedeme novou množinu výrokových proměnných $Var' = \{v_z \mid z \in A\}$[4]; můžeme bez problému předpokládat, že obsahuje naši původní množinu Var. Definujeme novou logiku L′ v jazyce $\mathcal{L}'$, který má stejné spojky jako jazyk $\mathcal{L}$ a množinu proměnných Var'. Pokud ukážeme, že tato logika má SLP, stačí k dokončení důkazu tohoto případu zopakovat postup z předchozího případu.

Zvolme libovolnou prezentaci $\mathcal{AS}$ logiky L. Jelikož množina $\mathcal{L}$-formulí je spočetná, víme, že každé pravidlo $\mathcal{AS}$ má spočetně mnoho premis. Definujme axiomatický systém $\mathcal{AS}' = \{\sigma[X] \rhd \sigma(\varphi) \mid X \rhd \varphi \in \mathcal{AS}$ a σ je $\mathcal{L}'$-substituce$\}$ a logiku L′ v jazyce $\mathcal{L}'$ s prezentací $\mathcal{AS}'$. Jelikož všechna pravidla v $\mathcal{AS}'$ mají spočetně předpokladů, má každý důkaz spočetně listů, a tedy $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}'} \varphi$ právě tehdy, když existuje spočetná množina $\Gamma' \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}'} \varphi$.

Dále pozorujme, že L′ je konzervativní rozšíření logiky L (uvažme substituci σ, která se chová na množině Var jako identita a zbytku přiřadí nějaké fixované $p \in Var$, vezměme libovolný důkaz $\mathcal{L}$-konsekuce $\Gamma \rhd \varphi$ v $\mathcal{AS}'$ a všimněme si, že ten samý strom, kde označení uzlu formulí ψ nahradíme formulí $\sigma\psi$, je důkaz φ z Γ v L).

Nyní ukážeme, že logika L′ má SLP: Předpokládejme, že $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}'} \chi$ a $\Gamma, \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}'} \chi$. Existuje spočetná množina $\Gamma' \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma', \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}'} \chi$ a $\Gamma', \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}'} \chi$. Označme Var_0 množinu proměnných vyskytujících se v $\Gamma' \cup \{\varphi, \psi, \chi\}$ a uvažme bijekci g na množině Var' takovou, že obraz množiny Var_0 je podmnožina Var (lze snadno nahlédnou, že taková bijekce existuje). Tedy pro $\mathcal{L}'$-substituci σ určenou funkcí g existuje inverzní substituce σ^{-1} a $\sigma[\Gamma'] \cup \{\sigma\varphi, \sigma\psi, \sigma\chi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$. Zřejmě také $\sigma[\Gamma'], \sigma\varphi \to \sigma\psi \vdash_{\mathrm{L}'} \sigma\chi$ a $\sigma[\Gamma'], \sigma\psi \to \sigma\varphi \vdash_{\mathrm{L}'} \sigma\chi$. Využijeme faktu, že L′ rozšiřuje L konzervativně, a dostaneme $\sigma[\Gamma'], \sigma\varphi \to \sigma\psi \vdash_{\mathrm{L}} \sigma\chi$ a $\sigma[\Gamma'], \sigma\psi \to \sigma\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \sigma\chi$. Z SLP logiky L víme, že $\sigma[\Gamma'] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma\chi$ a $\sigma[\Gamma'] \vdash_{\mathrm{L}'} \sigma\chi$, ze strukturality pro inverzní substituci σ^{-1} plyne také $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}'} \chi$. □

V nadcházející větě ukážeme všechny vlastnosti semilineárních logik, které jsme nyní připraveni dokázat; později uvidíme, že některé z nich jsou dokonce charakterizací semilinearity. Připomeňme, že jsme v tvrzení 1.3.14 ukázali několik charakterizací konečně $\cap$-ireducibilních filtrů/teorií pro klasickou logiku; v následujícím tvrzení ukážeme další (linearitu), která platí pro každou semilineární logiku.

VĚTA 4.1.7 (Vlastnosti semilineárních logik). *Nechť* L *je semilineární logika v jazyce $\mathcal{L}$, poté platí:*

1. L *má* LEP, *tj. lineární teorie tvoří bázi* Th(L).
2. L *má* SLP, *tj.* $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *implikuje* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.
3. L *má přenesenou* SLP, *tj.* $\mathrm{Fi}(X, a \to b) \cap \mathrm{Fi}(X, b \to a) = \mathrm{Fi}(X)$ *pro každou $\mathcal{L}$-algebru* $\boldsymbol{A}$ *a každou množinu* $X \cup \{a, b\} \subseteq A$.
4. *Lineární filtry se shodují s konečně $\cap$-ireducibilními filtry na každé $\mathcal{L}$-algebře.*
5. $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}} = \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.
6. $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}} \subseteq \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.
7. L *má* IPEP, *tj. konečně $\cap$-ireducibilní teorie tvoří bázi* Th(L).

[4]Všimněme si, že tato množina není spočetná, a tedy nesplňuje omezení na kardinalitu množiny výrokových proměnných, které jsme pro zjednodušení na začátku zavedli. Avšak prozkoumáním relevantních částí obecné teorie, kterou jsme doposud zavedli, zjistíme, že vše potřebné pro důkaz tohoto tvrzení by platilo i bez tohoto omezení.

Důkaz. První tvrzení: Pokud $T \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$, pak existuje $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$ a $\mathbf{A}$-ohodnocení e takové, že $e[T] \subseteq F$ a $e(\chi) \notin F$. Definujeme $T' = e^{-1}[F]$. Je zřejmé, že T' je teorie, $T \subseteq T'$ a $T' \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$. Jelikož $\leq_{\mathbf{A}}$ je lineární uspořádání, platí: $e(\varphi) \leq_{\mathbf{A}} e(\psi)$ nebo $e(\psi) \leq_{\mathbf{A}} e(\varphi)$ pro každou formuli φ a ψ. Tedy $e(\varphi \to \psi) \in F$ nebo $e(\psi \to \varphi) \in F$ neboli $\varphi \to \psi \in T'$ nebo $\psi \to \varphi \in T'$.

Druhé tvrzení: Pokud $T \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$, pak (díky LEP) víme, že existuje lineární teorie $T' \supseteq T$ taková, že $T' \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $T' \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$, a tedy také $T, \varphi \to \psi \nvdash_{\mathrm{L}} \chi$.

Třetí tvrzení plyne z SLP užitím výše dokázané věty o přenosu SLP.

Čtvrté tvrzení: Nechť $\boldsymbol{A}$ je $\mathcal{L}$-algebra. Jeden směr platí díky tvrzení 4.1.4. Druhý směr triviálně platí pro $F = A$, v opačném případě ukážeme kontrapozicí, že se jedná o důsledek předchozího tvrzení: předpokládejme, že existují $a, b \in A$ takové, že $a \to b \notin F$ a $b \to a \notin F$, tj. $F \subsetneq \mathrm{Fi}(F, a \to b)$ a $F \subsetneq \mathrm{Fi}(F, b \to a)$. Tím dostaneme $F = \mathrm{Fi}(F) = \mathrm{Fi}(F, a \to b) \cap \mathrm{Fi}(F, b \to a)$, a tedy F není konečně $\cap$-ireducibilní.

Páté tvrzení je o snadný důsledek předchozího tvrzení a věty 1.3.17. Šesté tvrzení je přímý důsledek předchozího tvrzení. Poslední tvrzení je snadný důsledek LEP a tvrzení 4.1.4. □

Všimněme si, že v předchozí větě jsme pouze LEP dokázali přímo ze semilinearity; každé další tvrzení (až na poslední) jsme dokázali jako důsledek předcházejícího tvrzení. Nyní se nabízí otázka, kdy jsou tvrzení 1–6 ekvivalentní. Prvně si všimněme, že páté tvrzení říká, že semilineární logiky jsou úplné vzhledem k $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$, což je známou vlastností logik majících IPEP, jak jsme ukázali ve větě 1.3.22, a tedy pro logiku mající IPEP páté tvrzení implikuje semilinearitu. Pro *finitární* logiky jsme ve větě 1.3.21 dokázali ještě více: úplnost vzhledem k $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$, což je vlastnost, která v kombinaci s šestým tvrzením implikuje semilinearitu. Tato vlastnost je však spíše obskurní, a proto uvádíme následující charakterizaci prostřednictvím pojmů finitární logiky a logiky mající IPEP.

VĚTA 4.1.8 (Charakterizace semilineárních logik). *Pro každou slabě implikativní logiku* L *je následující ekvivalentní:*

1. L *je semilineární, tj.* $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})}$.
2. L *má* LEP, *tj. lineární teorie tvoří bázi* Th(L).

Navíc pokud L *má* IPEP, *můžeme seznam ekvivalentních tvrzení rozšířit o:*

3. L *má* SLP, *tj.* $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *a* $\Gamma, \psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$ *implikuje* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.
4. L *má přenesenou* SLP, *tj.* $\mathrm{Fi}(X, a \to b) \cap \mathrm{Fi}(X, b \to a) = \mathrm{Fi}(X)$ *pro každou $\mathcal{L}$-algebru $\boldsymbol{A}$ a každou množinu* $X \cup \{a, b\} \subseteq A$.
5. *Lineární filtry se shodují s konečně $\cap$-ireducibilními filtry v každé $\mathcal{L}$-algebře.*
6. $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}} = \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.

Navíc pokud L *je finitární, můžeme seznam rozšířit také o:*

7. $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}} \subseteq \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.

Důkaz. Díky komentáři předcházejícímu této větě víme, že stačí ukázat pouze jednu implikaci, konkrétně *2 implikuje 1*. Předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Nechť T je teorie generovaná Γ a nechť $T' \supseteq T$ je lineární teorie taková, že $T' \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$.

Z bodu 3 lemmatu 1.2.13 víme $\mathbf{LindT}_{T'} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$, z jeho druhého bodu snadno vyplývá, že $[T']$ je lineární filtr, tj. $\mathbf{LindT}_{T'} \in \mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{L})$. Dále první bod téhož lemmatu nám říká, že pro $\mathbf{LindT}_T$-ohodnocení e definované jako $e(\chi) = [\chi]_{T'}$ dostaneme $e(\chi) \in [T']$ právě tehdy, když $\chi \in T'$. Platí tedy $e[\Gamma] \subseteq [T']$ a $e(\varphi) \notin [T']$, tím jsme ukázali $\Gamma \not\models_{\mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{L})} \varphi$. □

Předchozí věty mají několik zajímavých a důležitých důsledků. První využívá triviální pozorování, že $\varphi, \psi \to \varphi \vdash \psi \to \varphi$ a pro regulární implikaci navíc $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi \to \varphi$, tedy pokud má logika SLP, odvodíme $\varphi \vdash \psi \to \varphi$.

DŮSLEDEK 4.1.9. *Každá regulárně implikativní semilineární logika je Rasiowa-implikativní.*

Dalším zajímavým důsledkem je fakt, že vlastnost LEP se zachovává pro i axiomatické extenze (toto tvrzení je založeno na faktu, že každá teorie logiky L, která obsahuje axiomy $\mathcal{A}$, je teorie také v logice L + $\mathcal{A}$).

DŮSLEDEK 4.1.10. *Každá axiomatická extenze semilineární logiky je semilineární logika.*

Tento důsledek je obzvlášť užitečný pro popis velkých tříd slabě implikativních logik, které nejsou semilineární vzhledem k *žádné* slabé implikaci.

Je vcelku snadné ukázat, že daná logika není semilineární vzhledem k dané principální implikaci. Uvažme např. intuicionistickou logiku s její klasickou implikací: zde tvrzení plyne z velmi dobře známého faktu, $\models_{\mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{IL})} (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ a $\nvdash_{\mathrm{IL}} (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$. V dalším tvrzení, jehož důkaz opět využívá naši charakterizační větu (spolu s lemmatem 4.1.3), ukážeme, že platí více:

TVRZENÍ 4.1.11. *Intuicionistická logika není semilineární vzhledem k žádné principální implikaci.*

Důkaz. Ukážeme dva různé důkazy tohoto tvrzení. První bude velmi snadný *ad hoc* důkaz, druhý bude sofistikovanější a bude využívat techniky, které jsme zavedli v této kapitole, výhodou tohoto důkazu je, že ukazuje obecný postup, jak ukázat nedefinovatelnost semilineární implikace pro danou logiku.
(1) Nechť IL je intuicionistická výroková logika. Předpokládejme, že $\to'$ je semilineární implikace v IL, ukážeme, že $p \to' q \dashv\vdash_{\mathrm{IL}} p \to q$ (kde $\to$ je obvyklá implikace intuicionistické logiky), což by znamenalo, že $\to$ je semilineární implikace (což jak víme, není). Jeden směr je snadný: Z $p, p \to' q \vdash_{\mathrm{IL}} q$ dostaneme (užitím věty o dedukci) $p \to' q \vdash_{\mathrm{IL}} p \to q$. Opačný směr: využitím prvního směru dostaneme $q \to' p, p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} q \to p$. Protože $q \to' p, p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} p \to q$ a symetrizace každé dvojice slabých implikací jsou mezi sebou odvoditelné (důsledek 1.2.4), dostaneme $q \to' p, p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} p \to' q$. Nyní díky triviálnímu faktu, že platí $p \to' q, p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} p \to' q$, a díky SLP můžeme shrnout: $p \to q \vdash_{\mathrm{IL}} p \to' q$.
(2) Víme, že IL je Rasiowa-implikativní logika vzhledem k $\to$ a $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{IL}) = \{\langle \boldsymbol{A}, \{\overline{1}^{\boldsymbol{A}}\}\rangle \mid \boldsymbol{A} \in \mathbb{HA}\}$, kde $\mathbb{HA}$ je varieta Heytingových algeber (tvrzení 1.2.10). Předpokládejme, že IL je semilineární vzhledem k nějaké implikaci. Poté díky tvrzení 1.4.7 a větě 4.1.7 dostaneme $\{\langle \boldsymbol{A}, \{\overline{1}^{\boldsymbol{A}}\}\rangle \mid \boldsymbol{A} \in \mathbb{HA}_{\mathrm{SI}}\} = \mathbf{MOD}^*(\mathrm{IL})_{\mathrm{RSI}} \subseteq \mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{IL})$. Nyní stačí uvažovat libovolnou subdirektně ireducibilní Heytingovu algebru, která není lineárně uspořádaná kanonickým svazovým uspořádáním (je velmi dobře známo, že takové algebry existují). Tato algebra bude mít dva neporovnatelné svazové filtry (z tvrzení 1.1.25 víme, že IL-filtry Heytingových algebrách jsou právě svazové filtry). Spor tak plyne z lemmatu 4.1.3. □

Z tohoto lemmatu v kombinaci s předešlým důsledkem dostaneme:

TVRZENÍ 4.1.12. *Žádná slabě implikativní logika, jejíž axiomatickou extenzí je intuicionistická logika, není semilineární vzhledem k žádné principální implikaci.*

Za zmínku stojí, že toto tvrzení mimo jiné ukazuje, že SL_X pro libovolnou $X \subseteq \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{c}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\}$ není semilineární vzhledem k žádné principální implikaci. Navíc si můžeme všimnout, že druhý důkaz v tvrzení 4.1.11 může být aplikován na mnohé další slabě implikativní logiky; vše, co je potřeba udělat, je najít matici $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$, jejíž algebra připouští dva neporovnatelné filtry obsahující F.[5]

Na závěr této části ukážeme další důsledek věty 4.1.8, který říká, že průnik semilineárních logik je semilineární, a uvedeme zajímavé důsledky tohoto tvrzení.

DŮSLEDEK 4.1.13. *Průnik systému logik ve stejném jazyce, které sdílejí principální semilineární implikaci, je semilineární logika.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}$ je systém semilineárních logik ve stejném jazyce, označme $\hat{\mathrm{L}}$ jejich průnik. Ukážeme, že $\hat{\mathrm{L}}$ má LEP. Nechť T je teorie v logice $\hat{\mathrm{L}}$ a $\varphi \notin T$, tj. $T \nvdash_{\hat{\mathrm{L}}} \varphi$. Tedy existuje logika $\mathrm{L} \in \mathcal{I}$ taková, že $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$, tj. $\varphi \notin \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T)$. Tedy podle LEP logiky L existuje lineární teorie T' v L taková, že $T' \supseteq \mathrm{Th}_{\mathrm{L}}(T) \supseteq T$ a $\varphi \notin T'$. Protože T' je očividně také teorie v $\hat{\mathrm{L}}$, je důkaz hotov. □

Jelikož sporná logika je triviálně semilineární, umožňuje nám předchozí důsledek korektně definovat nejmenší semilineární extenzi dané logiky.

DEFINICE 4.1.14 (Logika L^ℓ). *Pro danou slabě implikativní logiku* L *značíme její nejmenší semilineární extenzi jako* L^ℓ.

V další části se budeme zabývat způsobem, jakým lze axiomatizovat logiku L^ℓ. Na druhou stranu je velmi snadné získat pro tuto logiku úplnou sémantiku:

TVRZENÍ 4.1.15. *Nechť* L *je slabě implikativní logika, poté platí:*

$$\mathrm{L}^\ell = \models_{\mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{L})} \quad a \quad \mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{L}^\ell) = \mathbf{MOD}^\ell(\mathrm{L}).$$

Semilineární extenze navíc zachovávají finitaritu:

TVRZENÍ 4.1.16. *Pokud* L *je finitární slabě implikativní logika, pak také* L^ℓ.

Důkaz. Připomeňme si, že finitární fragment logiky S, značený jako $\mathcal{FC}(\mathrm{S})$, je největší finitární logikou obsaženou v S. Nyní, protože L je finitární, dostaneme $\mathrm{L} \subseteq \mathcal{FC}(\mathrm{L}^\ell) \subseteq \mathrm{L}^\ell$. Pokud ukážeme, že $\mathcal{FC}(\mathrm{L}^\ell)$ je semilineární, dostaneme také $\mathcal{FC}(\mathrm{L}^\ell) = \mathrm{L}^\ell$, a tedy také L^ℓ je finitární. Snadno (ověřením SLP) můžeme dokázat obecnější tvrzení: finitární fragment každé semilineární logiky je semilineární. □

Poznamenejme, že důsledkem tohoto tvrzení je následující fakt: pokud je L finitární, pak L^ℓ je průnik všech jejích *finitárních* semilineárních extenzí.

[5]Uvažme například logiku L_0 danou varietou $\mathbb{V}$ generovanou takzvanou symetrickou rotací všech Heytingových algeber (popis této konstrukce lze najít např. v [30, 34]). Negace v L_0 je zřejmě involutivní, tzn. L_0 dokazuje $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$. Výše uvedenou úvahou můžeme ukázat, že L_0 není semilineární vzhledem k žádné principální implikaci, totéž platí pro každou logiku, jejíž je L_0 axiomatickou extenzí. Konkrétním příkladem takových logik jsou takzvané „involutivní extenze“ (viz [27]) logik SL_X, kde $X \subseteq \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{c}, \mathrm{i}, \mathrm{o}\}$, které jsou striktně slabší než L_0. Příklad takové logiky je dobře známý multiplikavně-aditivní fragment Girardovi (afinní) lineární logiky [31].

L	Axiom(y) potřebné k axiomatizaci L^{ℓ}
$\mathrm{FL_e}$	$((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee ((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$
$\mathrm{FL_{ew}}$	$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
BCKW	$((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

Tabulka 4.1: Axiomatizace vybraných substrukturálních semilineárních logik

4.2 Semilinearita a disjunkce

V této části se budeme zabývat vztahy mezi p-disjunkcemi, semilineárními implikacemi a jejich vlastnostmi. Za předpokladu, že jsou splněny jisté syntaktické požadavky, ukážeme, že logika je p-disjunkcionální právě tehdy, když je semilineární. Dále ukážeme, jak axiomatizovat logiky L^{ℓ}, a ukážeme novou charakteristiku p-disjunkcí.

Začneme tím, že ukážeme, že pro p-disjunkcionální logiku lze velmi snadno získat axiomatiku pro její nejmenší semilineární extenzi (dokonce ukážeme, že se jedná o *axiomatickou* extenzi).

VĚTA 4.2.1 (Axiomatizace logiky L^{ℓ}). *Nechť* L *je p-disjunkcionální slabě implikativní logika mající* IPEP. *Pak* L^{ℓ} *je extenze* L *o axiom(y):*

(P$_\nabla$) $\quad \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla(\psi \to \varphi)$.

Důkaz. Díky tvrzení 4.1.15 víme $\mathrm{L}^{\ell} = \models_{\mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})}$. Důkaz zakončíme užitím věty 3.3.7; musíme si pouze všimnout, že $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \models P$, kde P je pozitivní klauzule $\mathbf{F}(\varphi \to \psi) \vee \mathbf{F}(\psi \to \varphi)$. □

Axiom(y) (P$_\nabla$) nazýváme *axiom(y) prelinearity*. Všimněme si, že tyto axiomy platí v každé semilineární logice pro libovolnou p-protodisjunkci ∇ (stačí použít vlastnost SLP na $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla(\psi \to \varphi)$ a $\psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla(\psi \to \varphi)$). Jak jsme viděli v kapitole 3, axiomatická rozšíření logiky SL jsou typickými příklady slabě implikativních p-disjunkcionálních logik (všechny jsou téměř (MP)-založené, a tak známe jejich (p-)disjunkce, viz věta 2.2.12 a tabulka 2.8). Tímto způsobem můžeme dosáhnout některých velmi dobře známých axiomatizačních výsledků (viz tabulka 4.1) jako důsledků výše uvedené věty (pro BCKW využijeme příklad 3.1.20).

Samozřejmě bychom takto mohli získat axiomatiku i pro FL^{ℓ}, nebo dokonce SL^{ℓ}, ale to by zahrnovalo užití (iterovaných) konjugátů a tato axiomatizace by tak byla zbytečně složitá, později (věta 4.2.8) pro tyto logiky ukážeme podstatně jednodušší axiomatizaci.

Přirozenou otázkou zůstává, jak axiomatizovat nejmenší semilineární extenze logik, které nejsou p-disjunkcionální nebo jejich p-disjunkce není známa. První myšlenka, která se nabízí, je zvolit *vhodnou* p-protodisjunkci ∇ a rozšířit tuto logiku na L^{∇} a dále postupovat užitím předchozí věty. Ale to není tak snadné: jak bychom věděli, že platí $\mathrm{L}^{\nabla} \subseteq \mathrm{L}^{\ell}$? Abychom překonali tento problém, zavádíme dvojici konsekucí, která hraje (v jistém smyslu) duální roli ke konsekuci (P$_\nabla$):

(MP$_\nabla$) $\quad \varphi \to \psi, \varphi\nabla\psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi \qquad$ a $\qquad \varphi \to \psi, \psi\nabla\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$.

TVRZENÍ 4.2.2. (MP$_\nabla$) *je splněn:*

- *v každé logice pro každou p-disjunkci* ∇,
- *v každé substrukturální (nemusí nutně být svazovědisjunktivní!) logice pro* $\nabla = \vee$.

Důkaz. První tvrzení lze snadno dokázat (z $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ a $\psi, \varphi \to \psi \vdash \psi$). Abychom dokázali druhé, všimněme si, že každá substrukturální logika dokazuje: $\varphi \to \psi \vdash \varphi \vee \psi \to \psi$. □

V následujícím lemmatu a větě ukážeme, že konsekuce (P$_\nabla$) a (MP$_\nabla$) jsou přirozeným pojivem mezi implikací a disjunkcí.

LEMMA 4.2.3. *Nechť* L *je slabě implikativní logika v* $\mathcal{L}$, ∇ *p-protodisjunkce a* $\boldsymbol{A}$ *nechť je* $\mathcal{L}$*-algebra.*

- *Pokud* L *splňuje* (MP$_\nabla$)*, pak každý lineární filtr v* $\boldsymbol{A}$ *je* ∇*-prvofiltr.*
- *Pokud* L *splňuje* (P$_\nabla$)*, pak každý* ∇*-prvofiltr v* $\boldsymbol{A}$ *je lineární.*

Důkaz. První tvrzení: Uvažme lineární filtr F (tj. $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in F$ nebo $b \to^{\boldsymbol{A}} a \in F$) a nechť $a \nabla^{\boldsymbol{A}} b \subseteq F$. Tedy z (MP$_\nabla$) okamžitě dostaneme $b \in F$ nebo $a \in F$.

Druhé tvrzení: Předpokládejme, že F není lineární neboli existují prvky a, b takové, že $a \to^{\boldsymbol{A}} b \notin F$ a $b \to^{\boldsymbol{A}} a \notin F$. Protože však L splňuje (P$_\nabla$), máme $(a \to^{\boldsymbol{A}} b) \nabla^{\boldsymbol{A}} (b \to^{\boldsymbol{A}} a) \subseteq F$, a tedy F není ∇-prvofiltr. □

VĚTA 4.2.4 (Vztah p-disjunkce a semilinearity). *Nechť* L *je slabě implikativní logika s p-protodisjunkcí* ∇ *mající* IPEP*, pak je následující ekvivalentní:*

- ∇ *je (silná) p-disjunkce splňující* (P$_\nabla$).
- L *je semilineární a splňuje* (MP$_\nabla$).

Mimo jiné tedy platí:

1. *Pokud* L *splňuje* (P$_\nabla$) *a* (MP$_\nabla$)*, pak je semilineární právě tehdy, když* ∇ *je (silná) p-disjunkce.*
2. *Pokud* ∇ *je p-disjunkce, pak* L *je semilineární právě tehdy, když splňuje* (P$_\nabla$).
3. *Pokud* L *je semilineární, pak* ∇ *je (silná) p-disjunkce právě tehdy, když* L *splňuje* (MP$_\nabla$).

Důkaz. V první řadě si připomeňme, že v přítomnosti IPEP nezáleží na tom, zda mluvíme o p-disjunkci nebo o silné p-disjunkci (věta 3.2.15).

Implikace seshora dolů: Víme, že pokud ∇ je p-disjunkce, pak L má (MP$_\nabla$) (tvrzení 4.2.2) a PEP vzhledem k ∇ (tvrzení 3.2.14). Dále díky (P$_\nabla$) víme, že každá ∇-prvoteorie je lineární (předchozí lemma), tím jsme dokázali LEP a následně semilinearitu. Důkaz druhého směru je obdobný. □

Povšimněme si, že z tvrzení 1 této věty plyne mnoho dalších charakterizací semilinearity (prostřednictvím věty 3.2.15) pro širokou třídu logik, které mají IPEP a splňují (P$_\nabla$) a (MP$_\nabla$). Podobně si všimněme, že zbylá dvě tvrzení redukují (pro široké třídy logik) platnost metapravidel SLP a PCP na dokazatelnost jednoduchých konsekucí (P$_\nabla$) a (MP$_\nabla$).

Tato věta má také dva zajímavé důsledky. První nám umožní zesílit větu 4.1.10 z axiomatických *extenzí* na axiomatická *rozšíření*.

DŮSLEDEK 4.2.5. *Nechť* L_1 *je semilineární p-disjunkcionální logika a nechť* L_2 *je rozšíření logiky* L_1 *o množinu konsekucí* C *takové, že* L_2 *je slabě implikativní logika mající* IPEP, *pak* L_2 *je semilineární právě tehdy, když* $R^\nabla \subseteq L_2$ *pro každou* $R \in C$.

Mimo jiné tedy každé slabě implikativní axiomatické rozšíření finitární p-disjunkcionální semilineární logiky je semilineární logika.

Důkaz. Všimněme si, že z předpokladů dostaneme, že logiky L_i splňují (MP_∇) a (P_∇) pro $i = 1, 2$ a navíc $R^\nabla \subseteq L_1$ pro každou $R \in L_1$ (musíme si uvědomit, že jsme mlčky využili naší konvence, že pokud jsou dvě logiky slabě implikativní, pak sdílejí slabou implikaci $\to$). Tedy víme, že logika L_2 je semilineární právě tehdy, když ∇ má sPCP (díky větě 4.2.4). Důkaz dokončíme užitím věty 3.3.1.

K důkazu druhého tvrzení využijeme triviální fakt, že axiomatické rozšíření finitární logiky je finitární, a tedy má IPEP. □

PŘÍKLAD 4.2.6. Uvažme logiku $G_\triangle$, která je rozšířením Gödel-Dummettovy logiky G o unární spojkou $\triangle$, axiomatizovanou následujícími dodatečnými konsekucemi:[6]

($\triangle$1) $\rhd \triangle\varphi \vee \neg\triangle\varphi$

($\triangle$2) $\rhd \triangle(\varphi \vee \psi) \to \triangle\varphi \vee \triangle\psi$

($\triangle$3) $\rhd \triangle\varphi \to \varphi$

($\triangle$4) $\rhd \triangle\varphi \to \triangle\triangle\varphi$

($\triangle$5) $\rhd \triangle(\varphi \to \psi) \to (\triangle\varphi \to \triangle\psi)$

($\triangle$-Nec) $\varphi \rhd \triangle\varphi$

Snadno nahlédneme, že logiky G a $G_\triangle$ splňují podmínky předešlého důsledku, a tedy pro důkaz, že $G_\triangle$ je *semilineární* logika, stačí ukázat $\varphi \vee \chi \vdash_{G_\triangle} \triangle\varphi \vee \chi$. Využitím pravidla ($\triangle$-Nec) dostaneme $\varphi \vee \chi \vdash_{G_\triangle} \triangle(\varphi \vee \chi)$, důkaz zakončíme použitím axiomů ($\triangle$2) a ($\triangle$3) a vlastností spojky $\vee$.

Druhým důsledkem předchozí věty se dostáváme k jednomu z cílů této části, a to ke způsobu, jakým lze axiomatizovat logiku L^ℓ. Připomeňme, že značením L^∇ míníme nejslabší logiku, která je extenzí logiky L, kde ∇ je p-disjunkce (ohledně axiomatizace této logiky se odvoláváme na větu 3.3.6).

DŮSLEDEK 4.2.7. *Nechť* L *je slabě implikativní logika mající* IPEP *a nechť* ∇ *je její p-proto-disjunkce splňující* (MP_∇), *pak* L^ℓ *je extenze logiky* L^∇ *o* (P_∇).

Důkaz. Protože L^∇ + (P_∇) je axiomatická extenze L^∇, má tato logika díky lemmatu 1.3.12 IPEP a díky větě 3.3.1 v ní ∇ zůstává p-disjunkcí. Jedná se tedy podle věty 4.2.4 o semilineární logiku.

Nechť L' je libovolná semilineární extenze L. Zřejmě L' má IPEP (věta 4.1.7), splňuje (MP_∇), a tedy podle věty 4.2.4 je p-disjunkcionální. Tudíž $L^\nabla \subseteq L'$, a protože věta 4.2.4 také říká, že L' splňuje (P_∇), je důkaz hotov. □

Omezíme-li se v tomto důsledku na p-disjunkcionální logiky (které samozřejmě splňují (MP_∇) a navíc $L^\nabla = L$), dostaneme alternativní důkaz věty 4.2.1.

[6] Tuto logiku jsme definovali sémanticky v příkladě 3.1.6; ekvivalence těchto dvou definic je dokázána v [2] a z ní také triviálně plyne semilinearita této logiky. V důkazu rovnosti těchto dvou logik je ale důkaz semilinearity té syntakticky definované prvním krokem.

Jak jsme již viděli, substrukturální logiky se spojkou $\vee$ v jazyce tvoří velkou třídu logik splňujících ($\mathrm{MP}_\vee$). Ve zbytku této sekce shrneme důsledky předcházejících tvrzení pro tyto logiky a dokážeme o nich další zajímavá tvrzení.

Na začátku této sekce jsme ukázali, jak axiomatizovat logiku L^ℓ: stačí identifikovat vhodnou p-disjunkci a přidat axiom prelinearity. Předchozí důsledek pak poskytuje alternativní způsob pro substrukturální logiky se spojkou $\vee$ v jazyce, tato axiomatizace je sice méně elegantní, ale můžeme ji považovat za robustnější, protože u ní nepožadujeme mít identifikovanou p-disjunkci pro logiku L: stačí vzít logiku $\mathrm{L}^\vee$ (tzn. podle věty 3.3.10 přidat $\vee$-formy všech pravidel logiky) a přidat axiom prelinearity pro $\vee$. Máme tedy zatím dva způsoby, jak axiomatizovat logiku L^ℓ pro danou (substrukturální) logiku L (v následující větě tyto dva způsoby označujeme jako alternativy A a B). Oba tyto způsoby mají své výhody, ale jsou zbytečně komplikované: první přidá pouze axiomy, ale využívá iterovaných dedukčních termů, naopak druhý využívá pouze základní termy, ale přidává nová pravidla. Ukážeme, že v případě široké třídy substrukturálních logik můžeme přidat třetí a čtvrtou alternativu, která kombinuje výhody obou předchozích (uvádíme obě varianty, protože se jedná o zobecnění dvou různých formulací známých z literatury).

VĚTA 4.2.8. *Nechť* L *je téměř* (MP)-*založená substrukturální logika s množinou základních deduktivních termů* bDT *taková, že pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}$ *a všechny formule* φ, ψ *existuje formule* $\gamma' \in \mathrm{bDT}$ *splňující:*

$$\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \gamma'(\varphi) \to \gamma(\psi). \tag{*}$$

Pak L^ℓ *je vzhledem k* L *axiomatizována libovolnou z následujících množin axiomů/pravidel:*

A $\quad \gamma_1(\varphi \to \psi) \vee \gamma_2(\psi \to \varphi)$ *pro každou* $\gamma_1, \gamma_2 \in (\mathrm{bDT} \cup \{\star \wedge \overline{1}\})^*$

B $\quad (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

$\quad (\varphi \to \psi) \vee \chi, \varphi \vee \chi \vdash \psi \vee \chi$

$\quad \varphi \vee \psi \vdash \gamma(\varphi) \vee \psi$ *pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT}$

C $\quad ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ *pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT} \cup \{\star\}$

D $\quad (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ *pro každou* $\gamma \in \mathrm{bDT} \cup \{\star \wedge \overline{1}\}$.

Důkaz. Nechť L_X, pro $X \in \{A, B, C, D\}$, označuje odpovídající extenzi logiky L. Díky větě 2.2.12 víme, že $\{\gamma_1(p) \vee \gamma_2(q) \mid \gamma_1, \gamma_2 \in (\mathrm{bDT} \cup \{\star \wedge \overline{1}\})^*\}$ je p-disjunkce v L. A proto $\mathrm{L}_A = \mathrm{L}^\ell$ (věta 4.2.1). Abychom ukázali $\mathrm{L}_B = \mathrm{L}^\ell$, stačí si uvědomit následující dva fakty: $\vee$ je protodisjunkce v L a každá téměř (MP)-založená logika je finitární, a má tedy IPEP. Tudíž tvrzení platí díky důsledku 4.2.7 a větě 3.3.6.

Pravdivost zbylých tvrzení ukážeme prostřednictvím následujícího řetězce inkluzí: $\mathrm{L}^\ell \supseteq \mathrm{L}_C \supseteq \mathrm{L}_D \supseteq \mathrm{L}_B$. Pro důkaz první inkluze ukážeme, že pro každé $\gamma \in \mathrm{bDT} \cup \{\star\}$ platí:

(a) $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}^\ell} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ $\qquad$ ($\mathrm{Adj_u}$), ($\vee$1) a (MP)

(b) $\psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}^\ell} \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ $\qquad$ ($\mathrm{Adj_u}$) a $\varphi \vdash \gamma(\varphi)$

(c) $\psi \to \varphi \vdash_{\mathrm{L}^\ell} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ $\qquad$ (b), ($\vee$2) a (MP)

(d) $\vdash_{\mathrm{L}^\ell} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ $\qquad$ (a), (c) a SLP

Pro důkaz druhé inkluze nejprve ukážeme, že pro každé $\gamma \in \mathrm{bDT}$ platí:

(a) $\vdash_{\mathrm{L}_C} (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ — ($\mathrm{P_{SL}}26$), ($\vee 1$) a (T)

(b) $\vdash_{\mathrm{L}_C} \gamma'((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1}) \to \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ — ($\mathrm{P_{SL}}27$) a (*)

(c) $\vdash_{\mathrm{L}_C} \gamma'((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1}) \to (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ — (b), ($\vee 2$) a (T)

(d) $\vdash_{\mathrm{L}_C} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma'((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1}) \to (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ — (a), (c) a ($\vee 3$)

(e) $\vdash_{\mathrm{L}_C} (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma(\varphi \vee \psi \to \varphi)$ — (d) a (MP)

Důkaz pro $\gamma = \star \wedge \overline{1}$ je podobný: pouze v kroku (b) zvolme $\gamma' = \star$ a dále použijme ($\mathrm{P_{SL}}27$), ($\mathrm{Adj_u}$), ($\mathrm{P_{SL}}24$), (MP), ($\mathrm{P_{SL}}28$) a (T). Pro důkaz poslední inkluze nejprve ukážeme, že L_D dokazuje prelinearitu:

(a) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ — ($\vee 1$) a (Sf)

(b) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \to (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ — (a), ($\vee 1$) a (T)

(c) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ — obdobně

(d) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \varphi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ — (c), ($\wedge 1$) a (T)

(e) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee ((\varphi \vee \psi \to \varphi) \wedge \overline{1}) \to (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ — (b), (d) a ($\vee 3$)

(f) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ — (e) a (MP)

Dále ukážeme, že pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT}$ platí:

(a) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \to \psi$ — (As)

(b) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \to \gamma(\varphi) \vee \psi$ — (a), ($\vee 2$) a (T)

(c) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \varphi) \to \varphi$ — (As)

(d) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} \gamma'(\varphi \vee \psi \to \varphi) \to \gamma(\varphi)$ — (c) a (*)

(e) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} \gamma'(\varphi \vee \psi \to \varphi) \to \gamma(\varphi) \vee \psi$ — (d), ($\vee 1$) a (T)

(f) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \vee \psi \to \psi) \vee \gamma'(\varphi \vee \psi \to \varphi) \to \gamma(\varphi) \vee \psi$ — (b), (e) a ($\vee 3$)

(g) $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} \gamma(\varphi) \vee \psi$ — (f) a (MP)

Poznamenejme, že ten samý důkaz by platil i pro $\gamma = \star \wedge \overline{1}$; pouze v kroku (d) bychom zvolili $\gamma' = \star \wedge \overline{1}$ a dokázali ho z (c) pomocí ($\mathrm{Adj_u}$), ($\mathrm{P_{SL}}24$) a (MP). Tedy víme, že platí $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \wedge \overline{1}) \vee \psi$. Tento fakt využijeme k důkazu ($\mathrm{MP}_\vee$):

(a) $\varphi \vee \chi \vdash \chi \to \psi \vee \chi$ — ($\vee 2$)

(b) $\vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to (\varphi \vee \chi \to \psi \vee \chi)$ — ($\mathrm{P_{SL}}25$)

(c) $\vdash_{\mathrm{L}_D} \varphi \vee \chi \to ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \rightsquigarrow \psi \vee \chi)$ — ($\mathrm{E}_{\rightsquigarrow 1}$)

(d) $\varphi \vee \chi \vdash_{\mathrm{L}_D} (\varphi \to \psi) \wedge \overline{1} \to \psi \vee \chi$ — (c), (MP) a ($\mathrm{Symm_1}$)

(e) $\varphi \vee \chi \vdash_{\mathrm{L}_D} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \chi \to \psi \vee \chi$ — (a), (d) a ($\vee 3$)

(f) $(\varphi \to \psi) \vee \chi \vdash_{\mathrm{L}_D} ((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \chi$ — platí podle předchozího odstavce

(g) $(\varphi \to \psi) \vee \chi, \varphi \vee \chi \vdash_{\mathrm{L}_D} \psi \vee \chi$ — (e), (f) a (MP) □

Logika L	Axiomy, které je potřeba přidat k axiomatizování L^ℓ
SL	$((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \gamma((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$ pro každou $\gamma \in \{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon}\}$
$\mathrm{SL_w}$	$(\varphi \to \psi) \vee \gamma(\psi \to \varphi)$ pro každou $\gamma \in \{\alpha_{\delta,\varepsilon}, \alpha'_{\delta,\varepsilon}, \beta_{\delta,\varepsilon}, \beta'_{\delta,\varepsilon}\}$
$\mathrm{SL_e}$	$\alpha_{\delta,\varepsilon}((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee \beta_{\delta',\varepsilon'}((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$
$\mathrm{SL_{ew}}$	$\alpha_{\delta,\varepsilon}(\varphi \to \psi) \vee \beta_{\delta',\varepsilon'}(\psi \to \varphi)$
$\mathrm{SL_a}$	$(\lambda_\varepsilon(\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee (\rho_{\varepsilon'}(\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$
$\mathrm{SL_{ae}}$	$((\varphi \to \psi) \wedge \overline{1}) \vee ((\psi \to \varphi) \wedge \overline{1})$
$\mathrm{SL_{aew}}$	$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Tabulka 4.2: Axiomatizace L^ℓ pro prominentní substrukturální logiky

Tabulka 4.2 shrnuje axiomatizace prominentních semilineárních substrukturálních logik, jedná se o axiomatizace podle bodu C (všimněme si, že tyto logiky splňují předpoklad předcházející věty díky lemmatu 2.3.6 a tvrzení 2.3.4). Uvádíme je jako axiomatická schémata, která jsme někdy trochu upravili, abychom získali axiomatiku jednodušší či takovou, která je známá z literatury. Tyto úpravy lze ospravedlnit následujícími jednoduchými pozorováními:

- V logikách s oslabením využíváme, že platí $\vdash_{\mathrm{SL_w}} \varphi \leftrightarrow \varphi \wedge \overline{1}$, čímž získáme axiomatizaci C': $(\varphi \to \psi) \vee \gamma(\psi \to \varphi)$ pro každou $\gamma \in \mathrm{bDT} \cup \{\star\}$.
- Axiom pro $\gamma = \star \wedge \overline{1}$ můžeme vynechat, protože se jedná o důsledek axiomu pro $\gamma = \star$ užitím ($\mathrm{P_{SL}}28$).
- Axiom pro $\gamma = \star$ může být vynechán ze všech kromě posledních dvou axiomatizací, protože očividně plyne z axiomu pro $\alpha_{\overline{1},\overline{1}}$ (nebo $\lambda_{\overline{1}}$) užitím prvního (nebo pátého) bodu z tvrzení 2.3.4.
- V případě $\mathrm{SL_e}$ si prvně všimněme, že ona jedna navrhovaná formule axiomatizující $\mathrm{SL_e^\ell}$ je součástí axiomatizace z bodu A. Na druhou stranu: zvolíme-li $\delta = \varepsilon = \overline{1}$, respektive $\delta' = \varepsilon' = \overline{1}$, získáme užitím prvního bodu z tvrzení 2.3.4 zbývající dva axiomy z bodu C.
- Pro $\mathrm{SL_{ew}}$ a $\mathrm{SL_a}$ postupujeme obdobně jako v předchozím případě.

LEMMA 4.2.9. *Pro každou svazovědisjunktivní substrukturální logiku* L *je následující ekvivalentní:*

$(\mathrm{P}_\vee)$	$\vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$,
$(\mathrm{lin}_\wedge)$	$\vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$,
$(\mathrm{lin}_\vee)$	$\vdash_{\mathrm{L}} (\chi \to \varphi \vee \psi) \to (\chi \to \varphi) \vee (\chi \to \psi)$.

Důkaz. Ukážeme ekvivalenci prvních dvou axiomů; ekvivalence prvního a třetího se dokazuje podobně. Uvědomme si, že platí $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \varphi \wedge \psi$, a tedy také $\varphi \to \psi \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$. Důkaz zakončíme pomocí ($\vee$1) a PCP. Druhý směr: z $\varphi \wedge \psi \to \varphi \wedge \psi$ dostaneme $(\varphi \to \varphi \wedge \psi) \vee (\psi \to \varphi \wedge \psi)$. Zbytek je snadný. □

Díky využití tvrzení 4.2.2 víme, že ($\mathrm{MP}_\vee$) platí ve všech substrukturálních logikách, a můžeme tedy získat následující variantu věty 4.2.4 a důsledku 4.2.7.

TVRZENÍ 4.2.10. *Nechť* L *je substrukturální logika mající* IPEP *a spojku* $\vee$ *v jazyce, poté platí:*

- L *je semilineární právě tehdy, když je svazovědisjunktivní a splňuje* ($P_\vee$).
- L^ℓ *je extenze* $L^\vee$ *o libovolný z následujících axiomů:* ($P_\vee$), ($lin_\wedge$) *nebo* ($lin_\vee$).

Další tvrzení lze považovat za zobecnění příkladu 3.1.19.

TVRZENÍ 4.2.11. *Nechť* L *je Rasiowa-implikativní substrukturální semilineární logika, pak množina* $\nabla = \{(p \to q) \to q, (q \to p) \to p\}$ *je silná disjunkce.*

Důkaz. Snadno ukážeme, že ∇ je protodisjunkce, protože platí $p \vdash_L (p \to q) \to q$ ($P_{SL}4$) a $q \vdash_L (p \to q) \to q$ (W).

Dále ukážeme, že ∇ splňuje PCP. Předpokládejme, že platí $\Gamma, \varphi \vdash_L \chi$ a $\Gamma, \psi \vdash \chi$. Tedy zřejmě také $\Gamma, \varphi \to \psi, \varphi \nabla \psi \vdash_L \psi$, a tudíž $\Gamma, \varphi \to \psi, \varphi \nabla \psi \vdash_L \chi$; obdobně pro $\psi \to \varphi$. Aplikací SLP zakončíme důkaz PCP. Jako důsledek tvrzení 3.2.14 a věty 4.1.7 dostaneme také sPCP. □

Poznamenejme, že kdyby logika z předchozího tvrzení také obsahovala v jazyce spojku $\vee$, získali bychom $(p \to q) \to q, (q \to p) \to p \dashv\vdash p \vee q$. Otázkou zůstává, kdy můžeme získat silnější vztah těchto dvou spojek. Napřed si všimněme, že užitím obdobných argumentů jako výše bychom snadno ověřili, že $\nabla' = \{(p \rightsquigarrow q) \to q, (q \rightsquigarrow p) \to p\}$ by také byla silná disjunkce.

TVRZENÍ 4.2.12. *Nechť* L *je Rasiowa-implikativní substrukturální semilineární logika, poté platí:*

$$\vdash_L \varphi \vee \psi \leftrightarrow [(\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi] \wedge [(\psi \rightsquigarrow \varphi) \to \varphi]$$
$$\vdash_L \varphi \wedge \psi \leftrightarrow [\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)] \vee [\psi \,\&\, (\psi \to \varphi)].$$

Navíc: logika L *rozšiřuje* SL_e *právě tehdy, když*

$$\vdash_L \varphi \vee \psi \leftrightarrow [(\varphi \to \psi) \to \psi] \wedge [(\psi \to \varphi) \to \varphi].$$

Důkaz. První tvrzení: směr zleva doprava je snadný. Důkaz druhého směru je založen na pozorování: $\varphi \to \psi \vdash_L [(\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi] \to \psi$ (důsledek (Symm) a ($P_{SL}4$)).

Druhé tvrzení: očividně platí $\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi) \to \psi$ a $\psi \,\&\, (\psi \to \varphi) \to \psi$, a tedy také platí $[\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)] \vee [\psi \,\&\, (\psi \to \varphi)] \to \psi$; zbytek je snadný. Obrácený směr: předpokládejme, že $\varphi \to \psi$. Tedy $\varphi \to (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi))$ a z toho $\varphi \wedge \psi \to (\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \vee (\psi \,\&\, (\psi \to \varphi))$. Zbytek získáme snadno užitím SLP.

Poslední tvrzení: směr zleva doprava plyne z prvního tvrzení a faktu, že v rozšířeních SL_e obě implikace $\to$ a $\rightsquigarrow$ splývají. Obrácený směr: jelikož $\psi \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$ snadno plyne z předpokladu $\chi \vee \psi \leftrightarrow [(\chi \to \psi) \to \psi] \wedge [(\psi \to \chi) \to \chi]$ dostaneme použitím (Sf): $[((\psi \to \chi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi)] \to [\psi \to (\varphi \to \chi)]$. Důkaz zakončíme další instancí (Sf), konkrétně: $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash ((\psi \to \chi) \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$. □

Následující tvrzení je přímým důsledkem faktu, že semilineární logiky jsou úplné vzhledem k lineárně uspořádaným maticím, jejichž algebraické redukty jsou očividně distributivní svazy.

TVRZENÍ 4.2.13. *Nechť* L *je substrukturální semilineární logika s* $\wedge$ *a* $\vee$ *v jazyce a nechť* $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(L)$. *Pak* $\{\wedge, \vee\}$*-redukt* $\boldsymbol{A}$ *je distributivní svaz.*

4.3 Zesílení úplnosti: hustě uspořádané řetězce

Semilineární logiky jsme navrhli jako nástroj pro studium fuzzy logik jakožto logik úplných vůči třídě všech lineárně uspořádaných matic. V literatuře o fuzzy logikách je ale často studována více specifická sémantika založená na maticích nad konkrétním nosičem s konkrétním uspořádáním: prototypické příklady jsou (standardně uspořádaný) reálný či racionální jednotkový interval nebo jejich konečné podmnožiny. V této sekci se zaměříme na sémantiku hustě uspořádaných lineárních matic, což je vlastnost společná oběma výše zmíněným jednotkovým intervalům. Logiky s touto sémantikou charakterizujeme užitím speciální syntaktické vlastnosti systému všech teorií a vhodným metapravidlem, obdobně jako jsme to viděli při studiu disjunkcí a semilineárních implikací.

DEFINICE 4.3.1 (Hustý filtr). *Nechť* L *je slabě implikativní logika a* $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$. *Říkáme, že F je* hustý *filtr nad* $\mathbf{A}$*, pokud F je lineární a pro každé $a, b \in A$ takové, že* $a <_{\mathbf{A}} b$[7], *existuje $z \in A$ takové, že $a <_{\mathbf{A}} z$ a $z <_{\mathbf{A}} b$.*

Říkáme, že matice $\mathbf{A}$ *je* hustá lineární matice*, pokud je redukovaná a F je hustý filtr (ekvivalentně: pokud $\leq_{\mathbf{A}}$ je husté uspořádání). Třídu všech hustých lineárních* L*-modelů značíme* $\mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})$.

Stejně jako v případě disjunkce, kde charakterizujeme (pro logiky mající IPEP) definující metapravidlo PCP pomocí vhodné vlastnosti filtrového rozšíření, začneme i zde s metapravidlem DP. Naším cílem je tedy zavést odpovídající vlastnost filtrového rozšíření (jakou byla PEP v případě disjunkcí nebo LEP při studiu semilinearity). Nastává zde ale problém s tím, že DP není *strukturální* (mluví o *nepoužité* výrokové proměnné). To je důvod, který nás nutí pracovat nikoli s teoriemi, ale s množinami formulí jistých specifických vlastností.

DEFINICE 4.3.2 (Vlastnost hustoty). *Nechť* L *je slabě implikativní logika a* ∇ *p-protodisjunkce splňující pravidla asociativity* (A_∇). *Říkáme, že* L *má* vlastnost hustoty*, užíváme zkratku* DP[8]*, vzhledem k* ∇*, pokud pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi, \chi\}$ *a libovolnou proměnnou p nevyskytující se v* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi, \chi\}$ *platí:*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to p)\nabla(p \to \psi)\nabla\chi}{\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla\chi}.$$

DEFINICE 4.3.3 (Vlastnost hustého rozšíření). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Říkáme, že* L *má vlastnost* DEP[9]*, pokud každá množina formulí* Γ *taková, že* $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *a zároveň existuje nekonečně mnoho proměnných nevyskytujících se v* Γ*, může být rozšířena na hustou teorii* $T \supseteq \Gamma$ *takovou, že* $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$.

Abychom mohli ukázat charakterizaci úplnosti vůči hustě uspořádaným modelům užitím DEP, budeme potřebovat následující technické lemma.

LEMMA 4.3.4. *Nechť* L *je slabě implikativní logika,* $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})$*, T je teorie a φ formule. Pokud* $T \not\models_{\mathbf{A}} \varphi$*, pak existuje spočetná podmatice* $\mathbf{A}'$ *matice* $\mathbf{A}$ *taková, že* $\mathbf{A}' \in \mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})$ *a* $T \not\models_{\mathbf{A}'} \varphi$.

[7] Zápisem $a <_{\mathbf{A}} b$ míníme $b \not\leq_{\mathbf{A}} a$ (což díky linearitě F implikuje $a \leq_{\mathbf{A}} b$); poznamenejme, že jelikož nepředpokládáme, že matice $\mathbf{A}$ je redukovaná, nestačí psát „$a \leq_{\mathbf{A}} b$ a $a \neq b$."

[8] Z angl. „density property". (Pozn. překladatele.)

[9] Z angl. „dense extension property". (Pozn. překladatele.)

Důkaz. Matice $\mathbf{A}$ je netriviální, a tedy nekonečná (protože její maticové uspořádání $\leq$ je husté). Nechť e je nějaké ohodnocení dosvědčující $T \not\models_{\mathbf{A}} \varphi$. Definujme dvě posloupnosti: posloupnost K_i spočetných podmnožin A a dále posloupnost $\mathbf{A}_i$ spočetných podmatic matice $\mathbf{A}$ jako: $K_0 = e[\{\chi \mid \chi$ je podformule některé formule z $T \cup \{\varphi\}\}]$ a pro $i \geq 0$:

- $\mathbf{A}_i$ je podmatice generovaná K_i,
- K_{i+1} je libovolná hustá podmnožina A obsahující A_i.[10]

Je zřejmé, že omezení na kardinalitu množin K_i a A_i jsou splněna a $\mathbf{A}_i$ je nahoru usměrněný systém redukovaných matic, jejich sjednocení $\mathbf{A}'$ je tedy dle [18, věta 0.7.2] v $\mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. Matice $\mathbf{A}'$, jak lze snadno nahlédnout, je spočetná podmatice matice $\mathbf{A}$ taková, že $\mathbf{A}' \in \mathbf{MOD}^\delta(\mathrm{L})$ (plyne z konstrukce) a $T \not\models_{\mathbf{A}'} \varphi$ (protože $K_0 \subseteq A'$, můžeme využít ohodnocení e). □

VĚTA 4.3.5 (Charakterizace husté úplnosti). *Pro každou slabě implikativní logiku* L *platí:* $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^\delta(\mathrm{L})}$ *právě tehdy, když* L *má* DEP.

Důkaz. Pro důkaz implikace zprava doleva zopakujeme obvyklý důkaz úplnosti založený na konstrukci vhodné Lindenbaum-Tarského matice, musíme ale překonat restrikci kladenou na vlastnost DEP.

Uvažme množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ takovou, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Očíslujme (libovolně) výrokové proměnné a definujme substituce σ a σ': $\sigma(v_i) = v_{2i}$, $\sigma'(v_{2i}) = v_i$ a $\sigma'(v_{2i+1}) = v_i$ pro každé $i \geq 0$. Všimněme si, že $\sigma'\sigma\psi = \psi$ pro každou formuli ψ. Tedy také platí: $\sigma[\Gamma] \nvdash_{\mathrm{L}} \sigma\varphi$ (jinak by ze strukturality platilo $\sigma'\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma'\sigma\varphi$, tj. $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, což je spor). Dále si všimněme, že existuje nekonečně mnoho proměnných nevyskytujících se v $\sigma[\Gamma]$, můžeme tedy použít DEP a získat hustou teorii T takovou, že $T \supseteq \sigma[\Gamma]$ a $T \nvdash_{\mathrm{L}} \sigma\varphi$. Vezměme matici $\mathbf{A} = \mathbf{LindT}_T = \langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}/\Omega_{\mathrm{L}}(T), [T]\rangle$, pozorujme, že platí $\mathbf{A} \in \mathbf{MOD}^\delta(\mathrm{L})$, a uvažme $\mathbf{A}$-ohodnocení $e(\psi) = [\psi]_T$. Víme, že $e[T] \subseteq [T]$ a $e(\sigma\varphi) \notin [T]$.

Nyní uvažme $\mathbf{A}$-ohodnocení $e'(\psi) = e(\sigma\psi)$ a povšimněme si, že $e'(\varphi) = e(\sigma\varphi) \notin [T]$. Jelikož $\sigma[\Gamma] \subseteq T$, dostaneme $e'[\Gamma] = e[\sigma[\Gamma]] \subseteq e[T] \subseteq [T]$. Tím jsme dokázali: $\Gamma \not\models_{\mathbf{A}} \varphi$.

Pro důkaz implikace zleva doprava uvažme množinu formulí Γ s nekonečně mnoha nevyužitými proměnnými a formuli δ takovou, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \delta$. Z předpokladu dostaneme L-matici $\mathbf{A} = \langle \boldsymbol{A}, F\rangle$ a $\mathbf{A}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e(\delta) \notin F$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathbf{A}$ je spočetná (důsledek předchozího lemmatu). Pro každé $a \in A$ uvažme proměnnou v_a nevyskytující se v $\Gamma \cup \{\delta\}$ (taková proměnná určitě existuje). Dále uvažme $\mathbf{A}$-ohodnocení e' takové, že $e'(p) = e(p)$ pro proměnné z $\Gamma \cup \{\delta\}$ a $e'(v_a) = a$ pro $a \in A$.

Uvažme množinu formulí $T = \{\varphi \mid e'(\varphi) \in F\}$. Množina T je očividně teorie, $T \supseteq \Gamma$ a $\delta \notin T$; zbývá ukázat, že T je hustá v L. Linearita se ověří snadno (pro každou φ a ψ platí $e'(\varphi) \to^{\mathbf{A}} e'(\psi) \in F$ nebo $e'(\psi) \to^{\mathbf{A}} e'(\varphi) \in F$). Uvědomme si, že platí: $\varphi <_{\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle} \psi$ právě tehdy, když $e'(\varphi) <_{\mathbf{A}} e'(\psi)$. V takovém případě, protože $\mathbf{A}$ je hustá, existuje $a \in A$ takové, že $e'(\varphi) <_{\mathbf{A}} a = e'(v_a) <_{\mathbf{A}} e'(\psi)$. Tedy $\varphi <_{\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle} v_a$ a $v_a <_{\langle \boldsymbol{Fm}_{\mathcal{L}}, T\rangle} \psi$. □

Kombinací tohoto výsledku a charakterizace semilinearity prostřednictvím vlastnosti LEP z věty 4.1.8 dostaneme:

DŮSLEDEK 4.3.6. *Každá slabě implikativní logika* L*, která má* DEP*, má také* LEP.

[10] Uvažme libovolné dva prvky $a, b \in A_i$ takové, že $a < b$ a že neexistuje v A_i prvek mezi a a b, pak musí existovat množina $X_{a,b} \subseteq A \cap [a, b]$ izomorfní s $\mathbb{Q}$. Konstrukci K_{i+1} tak jednoduše provedeme přidáním všech takových množin do A_i.

LEMMA 4.3.7. *Nechť* L *je slabě implikativní logika s p-protodisjunkcí* ∇ *splňující* (MP_∇)*, pak* DEP *implikuje* DP.

Důkaz. Důkaz provedeme kontrapozicí: předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla\chi$ a p je proměnná nevyskytující se v $\Gamma, \varphi, \psi, \chi$. Z předpokladu víme, že existuje formule $\delta \in (\varphi \to \psi)\nabla\chi$ taková, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \delta$. Tedy existuje hustá lineární L-matice $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ a $\mathbf{A}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e(\delta) \notin F$. Zřejmě $e(\varphi) \nleq e(\psi)$ (jinak $e(\varphi \to \psi) \in F$, a tedy $e(\delta) \in F$), tzn. $e(\psi) < e(\varphi)$ (protože $\mathbf{A}$ je lineární). Protože $\mathbf{A}$ je hustá, existuje prvek $e(\psi) < a < e(\varphi)$. Vezměme ohodnocení $e'(v) = a$ pro $v = p$ a $e(v)$ jinak (zřejmě $e'[\Gamma] \subseteq F$). Pak pro prvky $v_1 = e'(\varphi \to p)$ a $v_2 = e'(p \to \psi)$ platí: $e'(v_i) \notin F$. Také platí: $e'(\chi) \notin F$ (jinak by platilo $e(\delta) \in F$). Z lemmatu 4.2.3 víme, že F je také ∇-prvofiltr, a tedy $e'(v_1)\nabla e'(v_2)\nabla e'(\chi) \nsubseteq F$. A proto $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to p)\nabla(p \to \psi)\nabla\chi$. □

Pro finitární logiky s ∇ bez parametrů můžeme dokonce dokázat ekvivalenci DEP a DP. Tím ukážeme hlavní výsledek této sekce: syntaktickou charakterizaci úplnosti vůči hustým lineárním modelům prostřednictvím metapravidla.

VĚTA 4.3.8 (Charakterizace husté úplnosti). *Nechť* L *je finitární semilineární disjunkcionální logika, pak následující je ekvivalentní:*

1. $\vdash_{\mathrm{L}} = \models_{\mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})}$.
2. L *má* DEP*, tj. každá množina formulí* Γ *taková, že* $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *a zároveň existuje nekonečně mnoho proměnných nevyskytujících se v* Γ*, může být rozšířena na hustou teorii* $T \supseteq \Gamma$ *takovou, že* $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$.
3. L *má* DP*, tj. pokud* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to p)\nabla(p \to \psi)\nabla\chi$ *pro proměnnou* p *nevyskytující se v* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi, \chi\}$*, tak* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} (\varphi \to \psi)\nabla\chi$.

Důkaz. Jediná implikace, kterou je třeba dokázat, je 3 implikuje 2. Mějme množinu formulí Γ takovou, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a existuje nekonečně mnoho proměnných, které se v Γ nevyskytují. Nejprve očíslujme všechny dvojice formulí $\langle\varphi_1, \psi_1\rangle, \langle\varphi_2, \psi_2\rangle, \ldots$ Dále zavedeme dvě posloupnosti množin formulí Γ_i a A_i takové, že všechny množiny A_i jsou konečné a $\Gamma_i \nvdash_{\mathrm{L}} A_i$. Začneme s $\Gamma_0 = \Gamma$ a $A_0 = \{\varphi\}$. Pro libovolné $i > 0$ uvažme následující případy:

- Pokud $\Gamma_i, \varphi_i \to \psi_i \nvdash_{\mathrm{L}} A_i$, pak definujeme $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\varphi_i \to \psi_i\}$ a $A_{i+1} = A_i$.
- Pokud $\Gamma_i, \varphi_i \to \psi_i \vdash_{\mathrm{L}} A_i$, pak definujeme $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\psi_i \to \varphi_i\}$ a $A_{i+1} = A_i\nabla(\varphi_i \to p)\nabla(p \to \psi_i)$ pro nějakou proměnnou p nevyskytující se v $\Gamma_i \cup A_i \cup \{\varphi_i, \psi_i\}$ (jelikož je nekonečně mnoho proměnných, které se nevyskytují v Γ, můžeme v každém kroku vybrat nějakou zatím nepoužitou; všimněme si, že by to nebyla pravda, pokud by ∇ obsahovala parametry).

Nyní indukcí dokážeme, že $\Gamma_i \nvdash_{\mathrm{L}} A_i$ pro každé i. Pro $i = 0$ tvrzení platí z předpokladu. Indukční krok: pokud došlo na první případ, pak zřejmě $\Gamma_{i+1} \nvdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$. Ve druhém případě předpokládejme (pro spor), že $\Gamma_{i+1} \vdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$, tj. $\Gamma_i, \psi_i \to \varphi_i \vdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$. Protože zřejmě také $\Gamma_i, \varphi_i \to \psi_i \vdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$ (plyne z předpokladu druhého případu a z vlastností disjunkce), můžeme užít SLP a získat $\Gamma_i \vdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$. Tedy také užitím DP dostaneme $\Gamma_i \vdash_{\mathrm{L}} A_i\nabla(\varphi_i \to \psi_i)$. Nakonec si všimněme, že díky sPCP (což platí díky větě 3.2.14) platí: z $\Gamma_i, A_i \vdash_{\mathrm{L}} A_i$ a z $\Gamma_i, \varphi_i \to \psi_i \vdash_{\mathrm{L}} A_i$ můžeme odvodit $\Gamma_i, A_i\nabla(\varphi_i \to \psi_i) \vdash_{\mathrm{L}} A_i$. Z toho dostaneme $\Gamma_i \vdash_{\mathrm{L}} A_i$, což je spor s indukčním předpokladem.

Dále definujme T jako L-teorii generovanou sjednocením všech množin Γ_i. Všimněme si, že pro každé i platí $T \nvdash_{\mathrm{L}} A_i$ (jinak by z finitarity a z konečnosti množiny A_i existovalo nějaké j takové, že $\Gamma_j \vdash_{\mathrm{L}} A_i$, tedy by zřejmě také platilo $\Gamma_{\max\{i,j\}} \vdash_{\mathrm{L}} A_{\max\{i,j\}}$, což by byl spor). Tedy $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ a z konstrukce T vyplývá, že je lineární. Ukážeme, že je i hustá: pokud $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi_i \to \psi_i$, pak konstrukce musela proběhnout druhým krokem (jinak by již $\Gamma_{i+1} \vdash_{\mathrm{L}} \varphi_i \to \psi_i$), tedy také $T \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi_i \to p$ a $T \nvdash_{\mathrm{L}} p \to \psi_i$ (protože jinak $T \vdash_{\mathrm{L}} A_{i+1}$). □

Poznamenejme, že předpoklady předchozí věty jsou splněny každou substrukturální semilineární logikou s $\vee$ v jazyce. Nyní podobně jako v případě logik L^{ℓ} a L^{∇} budeme řešit otázku nalezení nejslabší extenze logiky, která je úplná vůči svým hustým lineárním modelům.

LEMMA 4.3.9. *Nechť $\mathcal{I}$ je systém slabě implikativních logik ve stejném jazyce a $\hat{\mathrm{L}}$ jejich průnik, pak pokud každá logika z $\mathcal{I}$ má vlastnost* DEP*, pak ji má také* $\hat{\mathrm{L}}$.

Důkaz. Nechť Γ je množina formulí s nekonečně mnoha proměnnými, které se v ní nevyskytují, a φ formule taková, že $\Gamma \nvdash_{\hat{\mathrm{L}}} \varphi$. Tedy musí existovat logika $\mathrm{L} \in \mathcal{I}$ taková, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Z DEP pro L víme, že existuje L-teorie $T \supseteq \Gamma$ a $\varphi \notin T$. Důkaz zakončíme jednoduchým pozorováním, že T je také $\hat{\mathrm{L}}$-teorie. □

Toto lemma dohromady s faktem, že každá logika má alespoň jednu extenzi úplnou vůči svým hustým lineárním modelům (sporná logika), zaručuje korektnost následující definice (důkaz následného tvrzení probíhá stejně jako pro logiky L^{ℓ} a L^{∇}):

DEFINICE 4.3.10 (Logika L^{δ}). *Nechť* L *je slabě implikativní logika. Zápisem* L^{δ} *značíme nejslabší logiku úplnou vůči svým hustým lineárním modelům, která je extenzí logiky* L.

TVRZENÍ 4.3.11. *Nechť* L *je slabě implikativní logika, pak:* $\vdash_{\mathrm{L}^{\delta}} = \models_{\mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})}$ *a* $\mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L}^{\delta}) = \mathbf{MOD}^{\delta}(\mathrm{L})$. *Navíc pokud je* L *je finitární, pak i* L^{δ} *je také finitární*

VĚTA 4.3.12 (L^{δ} ve finitárních logikách). *Nechť* L *je finitární semilineární disjunkcionální logika. Pak logika* L^{δ} *je rovna průniku všech svých extenzí majících* DP *právě tehdy, když tento průnik je finitární a semilineární.*

Důkaz. Zmíněný průnik označme $\hat{\mathrm{L}}$. Pokud $\mathrm{L}^{\delta} = \hat{\mathrm{L}}$, pak z důsledku 4.3.6 víme, že $\hat{\mathrm{L}}$ má LEP, a tudíž je semilineární.

Pro důkaz opačného směru si nejprve všimněme, že $\hat{\mathrm{L}}$ má očividně DP a díky větě 4.2.4 je disjunkcionální. Tedy podle věty 4.3.8 má DEP, a tedy $\mathrm{L}^{\delta} \subseteq \hat{\mathrm{L}}$. Lemma 4.3.7 nám říká, že každá extenze logiky L mající DEP má také DP, tedy $\hat{\mathrm{L}} \subseteq \mathrm{L}^{\delta}$. □

Tyto výsledky zjednodušují a dávají nový pohled na přístup, jakým je v literatuře o fuzzy logikách (viz např. [38, 39]) dokazována úplnost vůči hustě uspořádaným modelům. Obvykle se začne zvolením vhodného důkazově-teoretického popisu logiky L, který pak rozšíříme na důkazový systém pro průnik všech extenzí logiky L splňujících DP, toho docílíme prostým přidáním DP jako pravidla (ve smyslu, jak jsou pravidla chápána v teorii důkazů, nikoli tak, jak pravidla chápeme zde). Pak se ukáže, že toto pravidlo lze eliminovat (užitím obdobných technik jako ve velmi dobře známém případě eliminace řezu). To spolu s předchozí větou umožní shrnout, že $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\delta}$ (případně takto, v závislosti na způsobu provedení eliminace DP, ukážeme rovnost konečných odvození či rovnost jejich množin teorémů), a tedy původní logika je úplná vůči třídě svých hustě uspořádaných modelů (náš obecný přístup samozřejmě nemůže poskytnout důkaz posledního kroku výše popsaného důkazu, na ten je nutno využít konkrétních vlastností uvažovaných logik).

4.4 Zesílení úplnosti: libovolné třídy řetězců

Nyní se budeme zabývat sémantikou danou libovolnou třídou lineárně uspořádaných matic. Doposud jsme úplnost uvažovali pouze jako rovnost mezi dvěma logikami, tj. jako rovnost dvou strukturálních relací důsledku, kde jedna je uvedená syntakticky a druhá sémanticky. V literatuře je však běžné zabývat se i alternativními pojmy úplnosti: rovností mezi množinami teorémů, či rovností vzhledem ke konečným konsekucím. Tyto pojmy formalizujeme zavedením tří typů úplnosti podle kardinality množin předpokladů v konsekucích. Dále se budeme zabývat charakterizací těchto vlastností a vztahů mezi nimi.

DEFINICE 4.4.1 (Tři typy úplnosti). *Nechť* L *je slabě implikativní semilineární logika a* $\mathbb{K} \subseteq \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$. *Říkáme, že logika* L *má vlastnost:*

- Silné $\mathbb{K}$-úplnosti*, zkráceně* S$\mathbb{K}$C[11]*, pokud pro každou množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi\}$: $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *právě tehdy, když* $\Gamma \models_{\mathbb{K}} \varphi$.
- Konečné silné $\mathbb{K}$-úplnosti*, zkráceně* FS$\mathbb{K}$C*, pokud pro každou* konečnou *množinu formulí* $\Gamma \cup \{\varphi\}$: $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *právě tehdy, když* $\Gamma \models_{\mathbb{K}} \varphi$.
- $\mathbb{K}$-úplnosti*, zkráceně* $\mathbb{K}$C*, pokud pro každou formuli* φ: $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ *právě tehdy, když* $\models_{\mathbb{K}} \varphi$.

Je zřejmé, že S$\mathbb{K}$C implikuje FS$\mathbb{K}$C a že FS$\mathbb{K}$C implikuje $\mathbb{K}$C. Naším dalším cílem je dokázat zajímavé charakterizace těchto tří vlastností, které nám pro určité semilineární logiky a vybrané třídy lineárních modelů umožní dokázat nebo vyvrátit odpovídající vlastnosti úplnosti. Pro jednoduchost se v této sekci omezíme na algebraicky implikativní logiky.

V redukovaných maticích algebraicky implikativních logik jsou filtry jednoznačně definovány pomocí rovnic, a tedy každá redukovaná matice je jednoznačně určena svým algebraickým reduktem, a lze tedy každé algebře v $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ přiřadit jí vlastní uspořádání (viz komentář za tvrzením 1.4.7). S mírným zneužitím jazyka budeme algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$, jejíž vlastní uspořádání je lineární, označovat jako L-řetězec a budeme užívat symbol $\models_{\mathbb{K}}$ nejen pro relaci rovnicového důsledku danou třídou L-řetězců $\mathbb{K}$, ale také pro relaci sémantického důsledku danou třídou odpovídajících matic. K problémům nemůže dojít, neboť je vždy zřejmé, zda mluvíme o formulích, či rovnicích (viz např. následující věta).

KONVENCE 4.4.2. *Ve zbytku této kapitoly budeme předpokládat, že* L *je algebraicky implikativní semilineární logika s principální implikací* $\to$*, dále budeme předpokládat, že* $\mathbb{K}$ *je třída* L*-řetězců.*

Jako první ukážeme algebraické ekvivalenty pro každý typ úplnosti (poznamenejme ještě, že tato věta, stejně jako další věty v této sekci, platí i za obecnějších podmínek, ale pro naše potřeby je tento stupeň obecnosti dostačující):

VĚTA 4.4.3 (Algebraická charakterizace vlastností úplnosti).

1. L *má* $\mathbb{K}$C *právě tehdy, když* $\mathbf{V}(\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})) = \mathbf{V}(\mathbb{K})$.
2. L *má* FS$\mathbb{K}$C *právě tehdy, když* $\mathbf{Q}(\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})) = \mathbf{Q}(\mathbb{K})$.
3. L *má* S$\mathbb{K}$C *právě tehdy, když* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}) = \mathbf{ISP}_{\sigma\text{-}f}(\mathbb{K})$.

[11]Z angl. „(finite) (strong) $\mathbb{K}$ completeness“. (Pozn. překladatele.)

Důkaz. Dokažme si první tvrzení. Pro směr zleva doprava mějme libovolnou rovnici $\varphi \approx \psi$. Pak: $\models_{\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})} \varphi \approx \psi$ právě tehdy, když $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $\models_{\mathbb{K}} \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $\models_{\mathbb{K}} \varphi \approx \psi$. Z toho plyne, že $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ a $\mathbb{K}$ splňují stejné rovnice, a tedy generují tutéž varietu. Druhý směr je zřejmý.

Zbývající dva body se ukazují podobně. První využívá faktu, že kvazivariety jsou charakterizovány kvazirovnicemi, druhý pak toho, že třídy uzavřeny na $\mathbf{ISP}_{\sigma\text{-}f}$ jsou charakterizovány kvazirovnicemi zobecněnými na spočetné množiny premis (tento operátor můžeme vynechat na levé straně rovnice, neboť $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ je již uzavřena na $\mathbf{ISP}_{\sigma\text{-}f}$, viz tvrzení 1.3.16). □

Všimněme si, že by stačilo psát $\mathbf{H}(\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}))$ místo $\mathbf{V}(\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}))$ a také, pokud $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ je kvazivarieta (např. když L je finitární), bychom mohli psát $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$ místo $\mathbf{Q}(\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}))$. Než přikročíme k důkazu hlavní charakterizace (konečné) silné úplnosti pomocí existence jistých (částečných) vnoření, potřebujeme si připravit jednu definici a lemma.

DEFINICE 4.4.4 (Usměrněná množina formulí). *Množina formulí Ψ je* usměrněná, *pokud pro každou dvojici $\varphi, \psi \in \Psi$ existuje $\chi \in \Psi$ taková, že formule $\varphi \to \chi$ i $\psi \to \chi$ jsou dokazatelné v* L *(formuli χ říkáme* horní závora *formulí φ a ψ).*

LEMMA 4.4.5. *Nechť* L *je finitární logika mající* S$\mathbb{K}$C, *pak pro každou množinu formulí Γ a každou usměrněnou množinu formulí Ψ je následující ekvivalentní:*

- $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \psi$ *pro každou $\psi \in \Psi$.*
- *Existuje řetězec $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}$ a $\boldsymbol{A}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e[\Psi] \cap F = \emptyset$, kde F je jednoznačně určený filtr takový, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$.*

Důkaz. Jeden směr je zřejmý. Pro důkaz druhého směru nejprve předpokládejme, že existuje proměnná v, která se nevyskytuje v $\Gamma \cup \Psi$. Definujme $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi \to v \mid \psi \in \Psi\}$. Sporem ukážeme, že $\Gamma' \nvdash_{\mathrm{L}} v$. Předpokládejme tedy, že $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}} v$. Tedy existují konečné množiny $\hat{\Gamma} \subseteq \Gamma$ a $\hat{\Psi} \subseteq \Psi$ takové, že $\hat{\Gamma} \cup \{\psi \to v \mid \psi \in \hat{\Psi}\} \vdash_{\mathrm{L}} v$. Nechť $\delta \in \Psi$ označuje horní závoru formulí v $\hat{\Psi}$. Jelikož $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \delta$, víme, že existuje matice $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}(\mathrm{L})$ a ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e(\delta) \notin F$. Dále definujme ohodnocení e' jako $e'(p) = e(p)$ pro každou $p \neq v$ a $e'(v) = e(\delta)$. Zřejmě $e'[\hat{\Gamma} \cup \{\psi \to v \mid \psi \in \hat{\Psi}\}] \subseteq F$ a $e'(v) \notin F$, což je spor s předpokladem $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}} v$.

Podle S$\mathbb{K}$C existuje $\langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$, kde $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}$, a ohodnocení e takové, že $e[\Gamma'] \subseteq G$ a $e(v) \notin G$. Tedy $e[\Psi] \cap G = \emptyset$ (kdyby $e(\psi) \in G$ pro nějakou $\psi \in \Psi$, tak bychom dostali $e(v) \in G$, protože $e[\Gamma'] \subseteq G$).

Nyní předpokládejme, že $\Gamma \cup \Psi$ využívá všechny výrokové proměnné a uvažme libovolnou enumeraci proměnných $\{v_n \mid n \in \mathsf{N}\}$. Vezměme substituce σ, σ' definované jako $\sigma(v_n) = v_{n+1}$ a $\sigma'(v_{n+1}) = v_n$ (a $\sigma'(v_0) = v_0$) a všimněme si, že $\sigma' \circ \sigma$ je identita. Poznamenejme, že $\sigma[\Gamma] \nvdash_{\mathrm{L}} \sigma(\psi)$ pro každou $\psi \in \Psi$ (neboť kdyby $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma(\psi)$, dostali bychom ze strukturality $\sigma'[\sigma[\Gamma]] \vdash_{\mathrm{L}} \sigma'\sigma(\psi)$, tj. $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \psi$). Proměnná v_0 se nevyskytuje v $\sigma[\Gamma] \cup \sigma[\Psi]$, takže můžeme využít předchozího postupu na tyto množiny a získat požadovaný model a ohodnocení $e \circ \sigma$. □

VĚTA 4.4.6 (Charakterizace silné úplnosti). *Předpokládejme, že* L *je finitární a svazovědisjunktivní. Pak je následující ekvivalentní:*

1. L *má* S$\mathbb{K}$C.
2. *Každá netriviální spočetná algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ *je vnořitelná do nějaké algebry z* $\mathbb{K}$.
3. *Každá spočetná algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ *je vnořitelná do nějaké algebry z* $\mathbb{K}$.

Důkaz. Pro důkaz, že 1 implikuje 2, uvažme netriviální spočetnou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ a její jednoznačně určený filtr F takový, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$. Víme, díky tvrzení 4.2.2 a lemmatu 4.2.3, že F je $\vee$-prvofiltr. Vezměme libovolnou množinu navzájem různých proměnných $\{v_a \mid a \in A\}$ (což lze udělat díky spočetnosti algebry $\boldsymbol{A}$) a uvažme následující množiny formulí:

$$\Gamma = \{c(v_{a_1},\ldots,v_{a_n}) \leftrightarrow v_{c^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n)} \mid \langle c,n\rangle \in \mathcal{L} \text{ a } a_1,\ldots,a_n \in A\} \cup \{v_a \mid a \in F\},$$

$$\Psi = \{v_{a_1} \vee \ldots \vee v_{a_n} \mid n \in \mathsf{N} \text{ a } a_1,\ldots,a_n \in A \setminus F\}.$$

Množina Ψ je očividně usměrněná a $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \psi$ pro každé $\psi \in \Psi$, neboť pro $\boldsymbol{A}$-ohodnocení $e(v_a) = a$ platí $e[\Gamma] \subseteq F$ a $a_1 \vee \ldots \vee a_n \notin F$ (jinak, protože F je také $\vee$-prvofiltr, bychom pro nějaké i dostali $a_i \in F$).

Nyní použijeme S$\mathbb{K}$C a lemma 4.4.5, tím získáme $\langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$, kde $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}$, a $\boldsymbol{B}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq G$ a $e(\psi) \notin G$ pro každou $\psi \in \Psi$. Uvažme zobrazení $f\colon A \to B$ definované jako $f(a) = e(v_a)$. Je zřejmé, že f je homomorfismus z $\boldsymbol{A}$ do $\boldsymbol{B}$. Ukážeme, že f je prosté zobrazení: vezměme $a, b \in A$ takové, že $a \neq b$, a předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $a \to^{\boldsymbol{A}} b \notin F$. Dostaneme: $f(a) \to^{\boldsymbol{B}} f(b) = e(v_a) \to^{\boldsymbol{B}} e(v_b) = e(v_{a \to^{\boldsymbol{A}} b}) \notin G$ (protože $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in \Psi$), a tedy $f(a) \neq f(b)$.

Fakt, že 2 implikuje 3, je zřejmý. Pro důkaz, že 3 implikuje 1, předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ pro nějakou Γ a φ. Protože L je finitární, podle věty 1.3.21 existuje $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ a ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e(\varphi) \notin F$. Nechť $\boldsymbol{B}$ je spočetná podalgebra $\boldsymbol{A}$ generovaná $e[Fm_{\mathcal{L}}]$. Uvažme podmatici $\langle \boldsymbol{B}, B \cap F\rangle$; z tvrzení 1.3.16 vyplývá $\mathbf{B} \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$. $\mathbf{B}$ není nutně subdirektně ireducibilní, ale má (díky větě 1.3.20) subdirektní reprezentaci α se systémem $\{\mathbf{C}_i = \langle \boldsymbol{C}_i, G_i\rangle \mid i \in I\} \subseteq \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$. Protože $e(\varphi) \notin B \cap F$, existuje nějaké $j \in I$ takové, že $(\pi_j \circ \alpha \circ e)(\varphi) \notin G_j$, a protože $e[\Gamma] \subseteq B \cap F$, dostaneme také $(\pi_j \circ \alpha \circ e)[\Gamma] \subseteq G_j$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{C}_j$ je spočetná algebra z $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ (plyne z konstrukce a tvrzení 1.4.7). Podle předpokladu tedy existuje matice $\boldsymbol{C} \in \mathbb{K}$ a vnoření $f\colon \boldsymbol{C}_j \hookrightarrow \boldsymbol{C}$. Na závěr si povšimněme, že $\boldsymbol{C}$-ohodnocení $f \circ \pi_j \circ \alpha \circ e$ dosvědčuje $\Gamma \not\models_{\mathbb{K}} \varphi$. □

DEFINICE 4.4.7 (Částečná vnořitelnost). *Jsou-li $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ dvě algebry v jazyce $\mathcal{L}$, říkáme, že množina $X \subseteq A$ je částečně vnořitelná do $\boldsymbol{B}$, pokud existuje prosté zobrazení $f\colon X \to B$ takové, že pro každou spojku $\langle c,n\rangle \in \mathcal{L}$ a každé $a_1,\ldots,a_n \in X$ splňující $c^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) \in X$ platí $f(c^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = c^{\boldsymbol{B}}(f(a_1),\ldots,f(a_n))$.*

Algebra $\boldsymbol{A}$ je částečně vnořitelná do *třídy* $\mathbb{K}$, *pokud každá její konečná podmnožina je částečně vnořitelná do nějaké algebry z* $\mathbb{K}$.

VĚTA 4.4.8 (Charakterizace konečné silné úplnosti). *Nechť* L *je finitární svazovědisjunktivní logika v* konečném *jazyce $\mathcal{L}$. Pak je následující ekvivalentní:*

1. L *má* FS$\mathbb{K}$C.
2. *Každá netriviální spočetná algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ *je částečně vnořitelná do* $\mathbb{K}$.
3. *Každá netriviální algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ *je částečně vnořitelná do* $\mathbb{K}$.
4. *Každá algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ *je částečně vnořitelná do* $\mathbb{K}$.
5. *Každá spočetná algebra z* $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RSI}}$ *je částečně vnořitelná do* $\mathbb{K}$.

Důkaz. Implikace 3→4 a 4→5 jsou triviální; 5→1 lze dokázat obdobně jako implikaci 3→1 ve větě 4.4.6.

1→2: Vezměme netriviální spočetnou $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$ s filtrem F a konečnou množinu $B \subseteq A$. Definujme množinu $B' = B \cup \{a \to^{\boldsymbol{A}} b \mid a, b \in B\}$. Uvažme množinu po dvou různých proměnných $\{v_a \mid a \in A\}$ a formuli $\varphi = \bigvee_{a \in B' \setminus F} v_a$ a definujme následující množinu formulí (všimněme si rozdílu mezi touto množinou a množinou Γ z důkazu věty 4.4.6):

$$\Gamma = \{c(v_{a_1}, \ldots, v_{a_n}) \leftrightarrow v_{c^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n)} \mid \langle c, n\rangle \in \mathcal{L} \text{ a } a_1, \ldots, a_n, c^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in B'\}.$$

Snadno nahlédneme, že Γ je konečná a $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$ (stačí uvážit $\boldsymbol{A}$-ohodnocení $e(v_a) = a$). Tedy podle FS$\mathbb{K}$C existuje $\boldsymbol{C} \in \mathbb{K}$ s filtrem G a $\boldsymbol{C}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq G$ a $e(\varphi) \notin G$. Pro důkaz, že B je částečně vnořitelná do $\boldsymbol{C}$, stačí ukázat, že zobrazení $f\colon B \to C$ definované jako $f(a) = e(v_a)$ je prosté (ostatní podmínky očividně plynou z definice). Vezměme $a, b \in B$ takové, že $a \neq b$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \to^{\boldsymbol{A}} b \notin F$, a protože také $a \to^{\boldsymbol{A}} b \in B'$ dostaneme $f(a) \to^{\boldsymbol{C}} f(b) = e(v_a) \to^{\boldsymbol{C}} e(v_b) = e(v_{a \to^{\boldsymbol{A}} b}) \notin G$ (protože $e(\varphi) \notin G$), tzn. $f(a) \neq f(b)$.

2→3: Mějme algebru $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$, konečnou $X \subseteq A$ a uvažme spočetnou podalgebru $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ generovanou X. Stačí ukázat, že $\boldsymbol{B}$ je konečně subdirektně ireducibilní vzhledem k $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})$. Nechť F, G jsou filtry takové, že $\langle \boldsymbol{A}, F\rangle, \langle \boldsymbol{B}, G\rangle \in \mathbf{MOD}^*(\mathrm{L})$ (víme, že $G = B \cap F$, a protože naše logika je algebraicky implikativní, $\mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(G) = F$). Uvažujme kontrapozicí: předpokládejme, že $G = G_1 \cap G_2$ pro nějaké $G_1, G_2 \in \mathcal{F}i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{B})$ takové, že $G \subsetneq G_1, G_2$. Vezměme $b_i \in G_i \setminus G$. Všimněme si, že $b_1, b_2 \notin F$, a tedy $F \subsetneq \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(G_i)$. Podle věty 3.2.6 máme: $G_1 \cap G_2 = \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{B}}(G_1 \vee G_2) = G \subseteq F$. Z toho získáme: $\mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(G_1) \cap \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(G_2) = \mathrm{Fi}^{\boldsymbol{A}}(G_1 \vee G_2) \subseteq F$, z čehož plyne, že F není konečně $\cap$-ireducibilní, což je spor s předpokladem $\boldsymbol{A} \in \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L})_{\mathrm{RFSI}}$. □

Poznamenejme, že implikace z 2, 3, 4 či 5 do 1 platí i pro nekonečné jazyky, zatímco opačné implikace ne (jak ukazuje následující příklad).

PŘÍKLAD 4.4.9. Uvažme jazyk $\mathcal{L}$, který vznikne z jazyka $\mathcal{L}_0 = \{\&, \to, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}\}$ přidáním spočetné množiny $C = \{c_n \mid n \in \mathsf{N}\}$ nových nulárních spojek. Nechť G_C je konzervativní rozšíření Gödel-Dummettovy logiky (viz příklad 3.1.6) v jazyce $\mathcal{L}$ bez nových axiomů a pravidel. Je zřejmé, že se jedná o semilineární Rasiowa-implikativní logiku a $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{G}_C)$ se skládá z algeber z $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{G})$ s nekonečně mnoha libovolně definovanými konstantami. Nyní uvažme třídu algeber $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbf{ALG}^*(\mathrm{G}_C)$ definovaných na $[0, 1]$, kde všechny konstanty až na konečně mnoho interpretujeme jako 1.

Uvažme libovolnou konečnou množinu formulí $\Gamma \cup \{\varphi\}$ takovou, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{G}_C} \varphi$. Pak také $\Gamma \nvdash_{\mathrm{G}} \varphi$, kde nové konstanty chápeme jako výrokové proměnné. Tedy díky standardní silné úplnosti Gödel-Dummettovy logiky existuje $[0, 1]_{\mathrm{G}}$-ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq \{1\}$ a také $e(\varphi) < 1$. Sestrojíme G_C-algebru $\boldsymbol{A}$ z $[0, 1]_{\mathrm{G}}$ zvolením $c_n^{\boldsymbol{A}} = e(c_n)$ pro každou c_n vyskytující se v $\Gamma \cup \{\varphi\}$ a $c_n^{\boldsymbol{A}} = 1$ jinak. Všimněme si, že e můžeme uvažovat jako $\boldsymbol{A}$-ohodnocení, a jelikož $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}_1$ (protože $\Gamma \cup \{\varphi\}$ obsahuje pouze konečné množství konstant), dostaneme $\Gamma \not\models_{\mathcal{R}_1} \varphi$. Tím jsme ukázali, že FS$\mathcal{R}_1$C platí pro G_C.

Na druhou stranu označme $[0, 1]_0$ Gödelovu algebru na $[0, 1]$ se všemi novými konstanty interpretovanými jako 0. Je zřejmé, že žádnou konečnou podmnožinu $[0, 1]_0$ obsahující 0 nelze částečně vnořit do žádné algebry z $\mathcal{R}_1$.

Nicméně logiky mající FS$\mathbb{K}$C lze charakterizovat i za předpokladu, že daná logika nemá disjunkci a/nebo má nekonečný jazyk.

VĚTA 4.4.10 (Charakterizace konečné silné úplnosti). *Pokud je* L *finitární, pak je následující ekvivalentní:*

1. L *má* FS$\mathbb{K}$C.
2. *Každý* L*-řetězec patří do* $\mathbf{ISP}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})$.

Důkaz. 1→2: pokud L má FS$\mathbb{K}$C, pak podle věty 4.4.3: $\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}) = \mathbf{Q}(\mathbb{K})$. Z [19, lemma 1.5] plyne, že každá relativně konečně subdirektně ireducibilní algebra z $\mathbf{Q}(\mathbb{K})$ (tj. každý L-řetězec) patří do $\mathbf{ISP}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})$.

2→1: Pokud L-řetězec patří do $\mathbf{ISP}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})$, pak protože každá L-algebra je reprezentovatelná jako subdirektní součin L-řetězců, dostaneme:

$$\mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}) \subseteq \mathbf{P}_{\mathrm{SD}}(\mathbf{ISP}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{ALG}^*(\mathrm{L}).$$

Tedy podle věty 4.4.3 platí, že L má FS$\mathbb{K}$C. □

Kombinací této věty s větou 4.4.6 dostaneme zajímavý důsledek: Každá finitární logika, která je *konečně silně* úplná vzhledem k určité třídě řetězců, je také *silně* úplná vzhledem ke třídě jejích ultraproduktů.

DŮSLEDEK 4.4.11. *Pokud je* L *finitární logika mající* FS$\mathbb{K}$C*, pak má také* $\mathbf{SP}_{\mathrm{U}}(\mathbb{K})$C.

Víme, že S$\mathbb{K}$C znamená, že se relace L a $\models_{\mathbb{K}}$ shodují; podobným způsobem lze ovšem také formulovat FS$\mathbb{K}$C:

TVRZENÍ 4.4.12. *Předpokládejme, že* L *je finitární. Pak* L *má* FS$\mathbb{K}$C *právě tehdy, když* L *je finitární fragment logiky* $\models_{\mathbb{K}}$.

Důkaz. Směr zprava doleva je zřejmý. Předpokládejme, že L má FS$\mathbb{K}$C, a označme $\mathrm{L}' = \mathcal{FC}(\models_{\mathbb{K}})$ finitární fragment logiky $\models_{\mathbb{K}}$. Pak platí: $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}'} \varphi$ právě tehdy, když existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma' \models_{\mathbb{K}} \varphi$ právě tehdy, když existuje konečná $\Gamma' \subseteq \Gamma$ taková, že $\Gamma' \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ (podle FS$\mathbb{K}$C) právě tehdy, když $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ (podle finitarity L). □

DŮSLEDEK 4.4.13. *Předpokládejme, že* L *je finitární a* $\models_{\mathbb{K}}$ *je také finitární (např. kdykoli* $\mathbf{P}_{\mathrm{U}}\mathbf{I}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{I}(\mathbb{K})$*). Pak* L *má* S$\mathbb{K}$C *právě tehdy, když* L *má* FS$\mathbb{K}$C.

Nyní ukážeme, že selhání vlastností úplnosti se dědí na konzervativní rozšíření.

TVRZENÍ 4.4.14. *Nechť* L′ *je konzervativní rozšíření logiky* L, $\mathbb{K}'$ *třída* L′*-řetězců a* $\mathbb{K}$ *třída jejích* L*-reduktů.*

- *Pokud* L′ *má* $\mathbb{K}'$C*, pak* L *má* $\mathbb{K}$C.
- *Pokud* L′ *má* FS$\mathbb{K}'$C*, pak* L *má* FS$\mathbb{K}$C.
- *Pokud* L′ *má* S$\mathbb{K}'$C*, pak* L *má* S$\mathbb{K}$C.

Důkaz. Všechny implikace se dokazují podobně, jako ukázka nechť poslouží důkaz prvního tvrzení: Chceme ukázat, že L má $\mathbb{K}$C, důkaz provedeme kontrapozicí: předpokládejme, že $\nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Jelikož L′ je konzervativní rozšíření L, máme také $\nvdash_{\mathrm{L}'} \varphi$, a tedy díky $\mathbb{K}'$C získáme $\not\models_{\boldsymbol{A}'} \varphi$ pro nějakou $\boldsymbol{A}' \in \mathbb{K}'$. Tedy také $\not\models_{\boldsymbol{A}} \varphi$ pro redukt $\boldsymbol{A}$ algebry $\boldsymbol{A}'$. A protože $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}$, dostaneme $\not\models_{\mathbb{K}} \varphi$. □

Zajímavým příkladem sémantiky, na kterou lze aplikovat charakterizaci silné úplnosti, je sémantika určená konečnými řetězci:

TVRZENÍ 4.4.15. *Předpokládejme, že* L *je finitární svazovědisjunktivní logika, označme* $\mathcal{F}$ *třídu všech konečných* L*-řetězců. Pak následující je ekvivalentní:*

1. L *má* S$\mathcal{F}$C.
2. *Všechny* L*-řetězce jsou konečné.*
3. *Existuje* $n \in \mathsf{N}$ *takové, že každý* L*-řetězec má nejvýše n prvků.*
4. *Existuje* $n \in \mathsf{N}$ *takové, že* $\vdash_{\mathrm{L}} \bigvee_{i<n}(x_i \to x_{i+1})$.

Důkaz. 1→2: Z věty 4.4.6 víme, že každý spočetný L-řetězec je vnořitelný do nějaké algebry z $\mathcal{F}$, tedy nemohou existovat nekonečné spočetné L-řetězce a z Löwenheim-Skolemových vět dále plyne, že nemohou existovat vůbec žádné nekonečné řetězce.

2→3: Pokud je každý L-řetězec konečný, pak musí existovat mez na jejich velikost, jinak by ultraprodukt všech těchto konečných řetězců byl nekonečný L-řetězec.

3→1: Triviální.

3→4: Vezměme libovolný L-řetězec $\boldsymbol{A}$ s filtrem F a elementy $a_0, \ldots, a_n \in A$. Jelikož A má nejvýše n prvků, je nemožné, aby $a_0 > a_1 > \cdots > a_n$, tedy existuje k takové, že $a_k \leq a_{k+1}$, tj. $a_k \to^{\boldsymbol{A}} a_{k+1} \in F$, a tedy je formule splněna. Zbytek důkazu plyne z úplnosti vůči řetězcům.

4→2: Kdyby existoval L-řetězec $\boldsymbol{A}$ s filtrem F a prvky $a_0, \ldots, a_n \in A$ pro které by platilo $a_0 > a_1 > \cdots > a_n$, pak by platilo $a_i \to^{\boldsymbol{A}} a_{i+1} \notin F$ pro každé $i < n$ a z toho, že F je $\vee$-prvofiltr, by plynulo, že $\not\models_{\boldsymbol{A}} \bigvee_{i<n}(x_i \to x_{i+1})$. □

Je zřejmé, že klasická logika splňuje podmínku předchozího tvrzení. Naopak jako protipříklad uvedeme Gödel-Dummettovu logiku G, kde S$\mathcal{F}$C neplatí, protože existuje nekonečný G-řetězec $[0, 1]_{\mathrm{G}}$.

DŮSLEDEK 4.4.16. *Pro finitární svazovědisjunktivní logiku* L *a přirozené číslo n získáme axiomatickou extenzi* $\mathrm{L}_{\leq n}$ *přidáním schématu* $\bigvee_{i<n}(x_i \to x_{i+1})$. *Tato logika je semilineární a úplná vůči* L*-řetězcům velikosti nejvýše n.*

Nakonec jako další příklad důležité sémantiky založené na konkrétních třídách řetězců budeme uvažovat řetězce na jednotkových intervalech reálných či racionálních čísel. Studium úplnosti vzhledem ke třídám „reálných" řetězců je tradiční záležitostí v literatuře o fuzzy logikách, kde se dokonce mluví o takzvané *standardní úplnosti*.

DEFINICE 4.4.17 (Reálná a racionální sémantika). *Třídu modelů* $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$ *definujeme jako* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}$, *pokud* $\boldsymbol{A}$ *je uzavřený, otevřený nebo napůl otevřený jednotkový interval na reálných číslech a* $\leq_{\boldsymbol{A}}$ *je obvyklé uspořádání na reálných číslech. Třídu* $\mathcal{Q} \subseteq \mathbf{MOD}^{\ell}(\mathrm{L})$ *definujeme analogicky na jednotkových intervalech racionálních čísel .*

VĚTA 4.4.18 (Vztahy mezi úplnostmi vůči racionální a reálné sémantice). *Nechť* L *je finitární logika.*

1. L *má* FS$\mathcal{Q}$C *právě tehdy, když má* S$\mathcal{Q}$C.
2. *Pokud* L *má* $\mathcal{R}$C, *pak má* $\mathcal{Q}$C.
3. *Pokud* L *má* FS$\mathcal{R}$C, *pak má* S$\mathcal{Q}$C.

Důkaz. Všechny tři tvrzení se dokazují obdobně užitím Löwenheim-Skolemovy věty dolů. Jako příklad dokažme první tvrzení. Pokud L má FS$\mathcal{Q}$C, pak díky důsledku 4.4.11 má také $\mathbf{SP}_{\mathrm{U}}(\mathcal{Q})$C . Předpokládejme, že $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Tedy existuje $\boldsymbol{A} \in \mathbf{P}_{\mathrm{U}}(\mathcal{Q})$ s filtrem F a ohodnocení e takové, že $e[\Gamma] \subseteq F$ a $e(\varphi) \notin F$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{A}$ je hustě uspořádaný řetězec. Uvažme spočetnou množinu $S = \{e(p) \mid p$ je výroková proměnná v $\Gamma \cup \{\varphi\}\}$. Podle Löwenheim-Skolemovy věty dolů (uvažujeme-li algebry jako prvořádové struktury) existuje spočetná elementární podstruktura $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ taková, že $S \subseteq B$. Z toho plyne, že $\boldsymbol{B}$ je také hustě uspořádaná, a tedy izomorfní s nějakým prvkem z $\mathcal{Q}$[12], tím jsme získali protipříklad, a tedy ukázali S$\mathcal{Q}$C. □

Poznamenejme, že v kontextu finitárních logik jsou úplnosti vůči $\mathcal{Q}$ ve skutečnosti ekvivalentní úplnostem vůči všem hustě uspořádaným lineárním modelům, a tudíž pro jejich charakterizaci můžeme použít větu 4.3.8. Máme-li totiž ohodnocení na hustě uspořádaném lineárním modelu, které poskytuje protipříklad na nějaké odvození, můžeme získat racionální protipříklad aplikací Löwenheim-Skolemovy věty dolů na (spočetnou) podalgebru generovanou obrazem ohodnocení přes všechny formule.

[12] K tomu využíváme velmi dobře známý fakt, že každá dvě (omezená) hustá spočetná uspořádání jsou izomorfní.

Kapitola 5

Trocha historie a další čtení

Většina pojmů běžně užívaných v tomto textu má původ v algebraické logice, tedy v disciplíně, která se zrodila v 19. století v pracích následujících význačných logiků: Boole, De Morgan a Pierce. Práce těchto logiků, původně zaměřená na klasickou logiku a Booleovy algebry, později vyústila ve studium rozličných tříd algeber, které sloužily jako sémantický základ pro neklasické výrokové logiky. Jak jsme viděli v první kapitole, standardní způsob, jak získat toto spojení mezi třídou algeber a neklasickou logikou, poskytuje Lindenbaum-Tarského metoda. Nutno podotknout, že algebraická logika ve velké míře využívá výsledky z univerzální algebry.

Je přirozené, že se později objevily snahy zobecnit tyto metody a dosažené výsledky. Tím vznikla takzvaná abstraktní algebraická logika (AAL), obor matematické logiky, který zkoumá ve vší obecnosti vztah mezi algebrami a libovolnými logikami. AAL tak tvoří základní kámen pojmosloví a metodologie užité v tomto textu. Čtenáře, kterého by tato oblast nebo její historie zajímaly více, odkazujeme na přehledový článek [24] nebo na monografie [18, 23, 53].

Kapitola 1: Slabě implikativní logiky

Tato kapitola slouží jako uvedení do světa AAL. V našem podání se však z didaktických důvodů omezujeme pouze na rámec slabě implikativních logik. Začínáme s pojmem relace důsledku, který zavedl Tarski v článku [48]. Łoś a Suszko v článku [36] doplnili tuto definici o podmínku strukturality. Na základě tohoto pojmu byl poté polskou školou extenzivně rozvíjen hlavní proud AAL (viz výše zmíněné monografie [18, 53]).

Wójcicki v článku [52] zavedl redukované maticové modely a dokázal příslušnou větu o úplnosti, Schmidtova věta (věta 1.3.3) je z článku [45] a vlastnost IPEP byla zavedena v článku [15], kde byla také dokázána věta 1.3.22.

Třetí bod věty 1.2.7 můžeme vnímat jako motivaci pro označení „Leibnizova kongruence“, která vychází z Leibnizova principu identity nerozlišitelného (principle of indiscernibles): dvojice prvků je kongruentní právě tehdy, když jsou „nerozlišitelné“ v daném maticovém modelu. Toto označení poprvé použili Blok a Pigozzi v článku [4].

Většina výsledků z části 1.3 pochází ze sekce 3.7 z knihy [53], např. věta o subdirektní reprezentovatelnosti redukovaných modelů finitárních logik a úplnost vůči RSI redukovaným modelům. Sekce 1.4 vděčí za mnoho monografii Bloka a Pigozziho z roku 1989 [5].

Slabě implikativní logiky byly poprvé zavedeny v článku [8] jako zobecnění pojmu implikativních logik Heleny Rasiowé (viz její monografie [43]), které zde nazýváme *Rasiowa-implikativní logiky*. Podle terminologie užité v knize [21] se matice pro slabě implikativní logiky shodují s třídou tzv. *kvazistandardních matic*, zatímco redukované matice se shodují s tzv. *standardními maticemi*.

Třída slabě implikativních logik byla dále zobecněna v článku [13], který zavádí takzvané *slabě p-implikativní logiky*. Jedná se o zobecnění, které je pro AAL typické a je založené na použití zobecněné spojky implikace, která na rozdíl od běžné binární spojky může být definována množinou formulí, které mohou dokonce obsahovat parametry (obdobně jako v případě zobecněné disjunkce, kterou jsme zkoumali v kapitole 3). Dále se tento článek zajímá o postavení slabě implikativních logik v rámci tzv. *Leibnizovy hierarchie:* ukazuje se, že slabě implikativní logiky tvoří vlastní podtřídu konečně ekvivalenčních logik (a tedy také protoalgebraických logik), naše algebraicky implikativní logiky jsou přesně ty slabě implikativní logiky, které jsou zároveň algebraizovatelné.

S výjimkou slabě implikativních logik lze všechny pojmy a výsledky z této kapitoly najít v knize [18] (v některých případech se jedná o varianty původních výsledků přizpůsobené našemu kontextu slabě implikativních logik).

Kapitola 2: Substrukturální logiky

V této kapitole se zabýváme studiem substrukturálních logik. Ty lze zhruba zadefinovat jako logické systémy, které z hlediska Gentzenovských kalkulů postrádají nějaká z tzv. *strukturálních pravidel:* záměna, oslabení, kontrakce (viz např. přehledové monografie [42, 44, 46]).

Tato třída logik obsahuje mnohé logiky nezávisle studované od poloviny 20. století, například relevanční logiky [1], lineární logiky [31], Lambekův kalkulus [35], fuzzy logiky [10] a mnoho dalších (včetně intuicionistické a klasické logiky, které lze považovat za extrémní případy substrukturálních logik, ačkoli splňují všechna strukturální pravidla).

V posledních dvou desetiletích algebraická logika vyvinula jednotný přístup ke všem těmto logikám: substrukturální logiky lze nyní uvažovat jako algebraizovatelné logiky, jejichž odpovídající algebraická sémantika je postavena na reziduovaných svazech. Tento přístup je shrnut v obsáhlé monografii [27], kde ovšem nejslabší uvažovanou logikou je logika FL.

Naše pojetí uvažuje širší rámec substrukturálních logik, kde základní nejslabší logikou je logika SL z článku [29], toto pojetí zároveň připouští dobře se chovající rozšíření a fragmenty. Definice ze sekce 2.1 pocházejí ze Sekce 2.5. kapitoly [14]. Axiomatické systémy logik SL, FL a FL_e byly převzaty z článku [29] a z knihy [27].

Sekce 2.2 pojednává o větách o dedukci a vlastnostech důkazu po případech a je postavena na Sekci 2.5. z kapitoly [14] a článku [11]. Také věty o dedukci pro FL a její axiomatické extenze byly již známé (např. [27, 28]). Novinkou z kapitoly [14] je však důkaz využívající pojmu téměř (MP)-založené logiky a osvětlení vztahu s vlastností důkazu po případech. Hlavní výsledek sekce 2.3, který ukazuje, že logika SL je téměř (MP)-založená, pochází z článku [11].

Kapitola 3: Disjunktivní logiky

V této kapitole studujeme pojem zobecněné disjunkce, který je definován pomocí různých forem vlastnosti důkazu po případech. Různé podoby zobecněných disjunkcí byly již dříve uvažovány v kontextu AAL (např. [16–18, 22, 23, 25, 49–51]). Náš přístup k dané problematice je založen na knize [18], kde definice disjunkce připouští množiny parametrizovaných formulí místo jedné formule $p \vee q$, což mimo jiné umožňuje vysoký stupeň obecnosti při definování disjunkce. Tím docházíme v naší terminologii k pojmu p-disjunkce.

V této kapitole předně vycházíme z novějšího článku [15], který zobecňuje výsledky existující pro finitární logiky na logiky libovolné. To nám v první části umožní systematicky zadefinovat různé třídy logik na základě vlastností, které mají jejich disjunkce. Takto zavádíme novou třídu svazovědisjunktivních logik (tzn. logik, kde se $\vee$ chová jako supremum pro uspořádání daném implikací). Dále dokazujeme, že se tyto třídy opravdu liší.

V druhé části představujeme několik syntaktických a sémantických charakterizací, které umožňují zobecnění některých již známých výsledků pro ne nutně finitární logiky. Konkrétně, věty 3.2.15 a 3.2.4 zobecňují odpovídající věty v Sekci 2.5.1 knihy [18] na logiky mající vlastnost IPEP.

Nakonec v poslední sekci, konkrétně ve větě 3.3.10 ukazujeme, jak využít (vhodnou) disjunkci k získání axiomatizace pozitivních univerzálních tříd redukovaných matic. Tento výsledek byl motivován článkem [26], kde jeho autor dokazuje (přímo bez užití disjunkce) konkrétní případ našeho výsledku pro logiku FL (lze si povšimnout, že klíčovou částí jeho důkazu je ověření, že určitá množina formulí je zobecněná disjunkce ve FL).

Kapitola 4: Semilineární logiky

Pojmy a výsledky z první sekce této kapitoly nemají mnoho přímých předchůdců: pojem slabě implikativní semilineární logiky byl zaveden Cintulou v článku [8] pod jménem „slabě implikativní *fuzzy* logiky“. Tento pojem byl dále rozšířen na slabě p-implikativní (protoalgebraické) logiky v článku [13] (zde lze také najít většinu výsledků z první sekce této kapitoly; výjimkou jsou věta 4.1.6, která pochází z kapitoly [14], a výsledek týkající se logik majících IPEP, který zde nově dokazujeme).

Článkem [13] byla zahájena důležitá terminologická změna: pojem „fuzzy“ (zatěžkaný mnoha dalšími významy) z [8] byl nahrazen neutrálnějším pojmem „semilineární“. Tento pojem byl zaveden Olsonem a Rafterym v článku [40] v kontextu reziduovaných svazů, kde označoval variety, jejichž subdirektně ireducibilní členy byly lineární (následujíc tradici univerzální algebry, která má ve zvyku nazývat třídu algeber „semi*X*“, kdykoli její subdirektně ireducibilní členy mají vlastnost *X*). Tato práce má mnoho duchovních otců: již od vzniku matematické fuzzy logiky bylo zřejmé, že existuje mnoho logických systému, které by si zasloužily být studovány jako *fuzzy logiky*. Tak již Petr Hájek ve své základní monografii [32] uvažoval ne jednu ani několik, ale dokonce všechny axiomatická extenze své takzvané „základní fuzzy logiky“ BL.

Druhá sekce zabývající se vztahy mezi semilinearitou a p-disjunkcemi je založena na Sekci 3.2 z kapitoly [14], s tím rozdílem, že zde výsledky uvádíme v modernější podobě a v souladu s novějším a obecnějším pojetím disjunkce z minulé kapitoly. Význam disjunkce byl ve fuzzy logice velmi dobře znám již od počátku této disciplíny (zejména v axiomu prelinearity nebo pro její zásadní roli v axiomatizaci prvořádových fuzzy logik). Jako důsledky obecných tvrzení, které dokazujeme, dostáváme několik důležitých výsledků (např. axiomatizace významných fuzzy logik). První abstraktní pojednání o vztahu semilinearity a disjunkcí lze najít v článku [51] (kde je dokázána méně obecná verze věty 4.2.4 spolu se svými důsledky), současný stav dané problematiky je zachycen v článku [12].

V posledních dvou sekcích studujeme vlastnosti úplnosti vůči vybraným třídám algeber. Studium různých forem úplnosti bylo již od počátku fuzzy logiky jejím ústředním motivem; důvodem je původní motivace pro fuzzy logiky, které byly zavedeny jakožto vícehodnotové logiky nabývající pravdivostní hodnoty z jednotkového intervalu reálných čísel. V sekci 4.3 se zabýváme sémantikou danou hustými lineárními uspořádáními. Klíčová takzvaná vlastnost hustoty se původně objevila v článku [47] v kontextu o mnoho specifičtějším, poté byla zobecněna na širokou třídu fuzzy logik v článku [38] a nakonec byla studována v článku [7] ve velmi obecném kontextu hypersekventových kalkulů; stupeň obecnosti této poslední verze je však zřejmě nekompatibilní s naším přístupem (uvažujeme tak jistou kombinaci prvních dvou). V poslední sekci pak zobecňujeme výsledky z článku [9] a to buď na algebraicky implikativní logiky, nebo specifičtěji na svazovědisjunktivní logiky.

Literatura

[1] Alan Ross Anderson a Nuel D. Belnap. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Volume 1.* Princeton University Press, Princeton, 1975.

[2] Matthias Baaz. Infinite-valued Gödel logic with 0-1-projections and relativisations. In: Petr Hájek, editor, *Gödel'96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science, and Physics*, svazek 6 edice *Lecture Notes in Logic*, strany 23–33. Springer-Verlag, Brno, 1996.

[3] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*, svazek 25 edice *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, třetí edice, 1967.

[4] Willem J. Blok a Don L. Pigozzi. Protoalgebraic logics. *Studia Logica*, 45:337–369, 1986.

[5] Willem J. Blok a Don L. Pigozzi. *Algebraizable Logics*, svazek 396 edice *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. Volně ke stažení z `http://orion.math.iastate.edu/dpigozzi/`.

[6] Stanley Burris a H.P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*, svazek 78 edice *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981.

[7] Agata Ciabattoni a George Metcalfe. Density elimination. *Theoretical Computer Science*, 403(1–2):328–346, 2008.

[8] Petr Cintula. Weakly implicative (fuzzy) logics I: Basic properties. *Archive for Mathematical Logic*, 45(6):673–704, 2006.

[9] Petr Cintula, Francesc Esteva, Joan Gispert, Lluís Godo, Franco Montagna a Carles Noguera. Distinguished algebraic semantics for t-norm based fuzzy logics: Methods and algebraic equivalencies. *Annals of Pure and Applied Logic*, 160(1):53–81, 2009.

[10] Petr Cintula, Petr Hájek a Carles Noguera, editoři. *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*, svazky 37 a 38 edice *Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations*. College Publications, Londýn, 2011.

[11] Petr Cintula, Rostislav Horčík a Carles Noguera. Non-associative substructural logics and their semilinear extensions: Axiomatization and completeness properties. *The Review of Symbolic Logic*, 6(3):394–423, 2013.

[12] Petr Cintula a Carles Noguera. Implicational (semilinear) logics II: Disjunction and completeness properties. Zasláno.

[13] Petr Cintula a Carles Noguera. Implicational (semilinear) logics I: A new hierarchy. *Archive for Mathematical Logic*, 49(4):417–446, 2010.

[14] Petr Cintula a Carles Noguera. A general framework for mathematical fuzzy logic. In: Petr Cintula, Petr Hájek, and Carles Noguera, editoři, *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic - Svazek 1*, svazek 37 edice *Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations*, strany 103–207. College Publications, Londýn, 2011.

[15] Petr Cintula a Carles Noguera. The proof by cases property and its variants in structural consequence relations. *Studia Logica*, 101(4):713–747, 2013.

[16] Janusz Czelakowski. Logical matrices, primitive satisfaction and finitely based logics. *Studia Logica*, 42(1):89–104, 1983.

[17] Janusz Czelakowski. Remarks on finitely based logics. In: *Proceedings of the Logic Colloquium 1983. Svazek 1. Models and Sets*, svazek 1103 edice *Lecture Notes in Mathematics*, strany 147–168. Springer, Berlín, 1984.

[18] Janusz Czelakowski. *Protoalgebraic Logics*, svazek 10 edice *Trends in Logic*. Kluwer, Dordrecht, 2001.

[19] Janusz Czelakowski a Wieslaw Dziobiak. Congruence distributive quasivarieties whose finitely subdirectly irreducible members form a universal class. *Algebra Universalis*, 27(1):128–149, 1990.

[20] Michael Dummett. A propositional calculus with denumerable matrix. *Journal of Symbolic Logic*, 24(2):97–106, 1959.

[21] J. Michael Dunn a Gary M. Hardegree. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, svazek 41 edice *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, Oxford, 2001.

[22] Wojciech Dzik. On the content of lattices of logics part 1: The representation theorem for lattices of logics. *Reports on Mathematical Logic*, 13:17–28, 1981.

[23] Josep Maria Font a Ramon Jansana. *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*, svazek 7 edice *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, Ithaca, NY, druhá edice, 2009. Volně ke stažení z `http://projecteuclid.org/euclid.lnl/1235416965`.

[24] Josep Maria Font, Ramon Jansana a Don L. Pigozzi. A survey of Abstract Algebraic Logic. *Studia Logica*, 74(1–2):13–97, 2003.

[25] Josep Maria Font a Ventura Verdú. Algebraic logic for classical conjunction and disjunction. *Studia Logica*, 50(3–4):391–419, 1991.

[26] Nikolaos Galatos. Equational bases for joins of residuated-lattice varieties. *Studia Logica*, 76(2):227–240, 2004.

[27] Nikolaos Galatos, Peter Jipsen, Tomasz Kowalski a Hiroakira Ono. *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, svazek 151 edice *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[28] Nikolaos Galatos a Hiroakira Ono. Algebraization, parametrized local deduction theorem and interpolation for substructural logics over FL. *Studia Logica*, 83(1–3):279–308, 2006.

[29] Nikolaos Galatos a Hiroakira Ono. Cut elimination and strong separation for substructural logics: An algebraic approach. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(9): 1097–1133, 2010.

[30] Nikolaos Galatos a James G. Raftery. Adding involution to residuated structures. *Studia Logica*, 77(2):181–207, 2004.

[31] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1–102, 1987.

[32] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, svazek 4 edice *Trends in Logic*. Kluwer, Dordrecht, 1998.

[33] Paweł Idziak. Lattice operations in BCK-algebras. *Mathematica Japonica*, 29:839–846, 1982.

[34] Sándor Jenei. On the structure of rotation-invariant semigroups. *Archive for Mathematical Logic*, 42(5):489–514, 2003.

[35] Joachim Lambek. On the calculus of syntactic types. *American Mathematical Monthly*, 65(3):154–170, 1958.

[36] Jerzy Łoś a Roman Suszko. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae*, 20:177–183, 1958.

[37] J.C.C. McKinsey. Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions. *Journal of Symbolic Logic*, 4(4):155–158, 1939.

[38] George Metcalfe a Franco Montagna. Substructural fuzzy logics. *Journal of Symbolic Logic*, 72(3):834–864, 2007.

[39] George Metcalfe, Nicola Olivetti a Dov M. Gabbay. *Proof Theory for Fuzzy Logics*, svazek 36 edice *Applied Logic Series*. Springer, 2008.

[40] Jeffrey S. Olson a James G. Raftery. Positive Sugihara monoids. *Algebra Universalis*, 57(1):75–99, 2007.

[41] Hiroakira Ono. Substructural logics and residuated lattices—an introduction. In: Vincent F. Hendricks a Jacek Malinowski, editoři, *50 Years of Studia Logica*, svazek 21 edice *Trends in Logic*, strany 193–228. Kluwer, Dordrecht, 2003.

[42] Francesco Paoli. *Substructural Logics: A Primer*, svazek 13 edice *Trends in Logic*. Kluwer, Dordrecht, 2002.

[43] Helena Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[44] Greg Restall. *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge, New York, 2000.

[45] Jürgen Schmidt. Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie. *Mathematische Nachrichten*, 7:165–182, 1952.

[46] Peter Schroeder-Heister a Kosta Došen, editoři. *Substructural Logics*, svazek 2 edice *Studies in Logic and Computation*. Oxford University Press, Oxford, 1994.

[47] Gaisi Takeuti a Satoko Titani. Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 49(3):851–866, 1984.

[48] Alfred Tarski. Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. *C. R. Société des Sciences et Letters Varsovie, cl. III*, 23:22–29, 1930.

[49] Antoni Torrens a Ventura Verdú. Distributivity and irreducibility in closure systems. Technická zpráva, Faculty of Mathematics, University of Barcelona, Barcelona, 1982.

[50] Ventura Verdú. Lògiques distributives i booleanes. *Stochastica*, 3:97–108, 1979.

[51] San-Min Wang a Petr Cintula. Logics with disjunction and proof by cases. *Archive for Mathematical Logic*, 47(5):435–446, 2008.

[52] Ryszard Wójcicki. Matrix approach in the methodology of sentential calculi. *Studia Logica*, 32(1):7–37, 1973.

[53] Ryszard Wójcicki. *Theory of Logical Calculi*, svazek 199 edice *Synthese Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/Londýn, 1988.